

2. Получены эмпирические зависимости, связывающие предел текучести с толщиной образца и количеством циклов деформирования.

3. Предложена схема упрочнения стали при циклической деформации.

Список литературы

1. Подгайский М. С. Влияние циклической деформации знакопеременным изгибом на механические свойства низколегированных сталей в зависимости от исходного структурного состояния / М. С. Подгайский, А. Б. Максимов // Термическая и термомеханическая обработка проката. – М. : Металлургия. – 1981. – С. 25–27.
2. Подгайский М. С. Упрочнение листовой стали при деформации циклическим изгибом / М. С. Подгайский, А. Б. Максимов // Повышение эффективности производства толстолистового проката. – М. : Металлургия. – 1984. – С. 79–81.
3. Долженков Ф. Е. Применение пластической деформации циклическим изгибом как элемента упрочняющей термомеханической обработки листового проката из сталей / Ф. Е. Долженков, М. С. Подгайский, А. Б. Максимов // Изв. АН СССР. Металлы. – 1984. – № 4. – С. 156–158.
4. Подгайский М. С. Упрочнение стали 10Г2С1 в зависимости от температуры деформирования циклическим изгибом / М. С. Подгайский, А. Б. Максимов, Т. М. Наливайченко // Металловедение и термическая обработка металлов. – 1985. – № 6. – С. 54–56.
5. Подгайский М. С. Пластическое деформирование при циклическом знакопеременном изгибе / М. С. Подгайский, А. Б. Максимов, Т. М. Наливайченко // Физико-химическая механика материалов. – 1983. – № 1. – С. 115–116.
6. Подгайский М. С. Влияние деформации циклическим изгибом на дислокационную структуру стали 10Г2С1 / М. С. Подгайский, А. Б. Максимов, Ю. П. Нескуб // Изв. АН СССР. Металлы. – 1984. – № 4. – С. 131–133.
7. Подгайский М. С. Субструктура и механические свойства стали 10Г2С1 после теплового и горячего деформирования циклическим изгибом / М. С. Подгайский, А. Б. Максимов, Ю. П. Нескуб // Металловедение и термическая обработка металлов. – 1985. – № 6. – С. 29–31.

Одержано 25.10.2011

Максимов О.Б. Розробка моделі зміцнення низьколегованої сталі при пластичній деформації циклічним вигином

Запропоновано і розраховано модель зміцнення при циклічному пластичному вигині товстолистового прокату з низьколегованих сталей.

Ключові слова: зміцнення, пластична деформація, низьколеговані сталі, прибудова текучості, твердість.

Maximov A. Development of low-alloy steel strengthening model during plastic deformation in cyclic bend
Model of hardening under cyclic plastic bending of low-alloy steels rolled plates was proposed and calculated.

Key words: work-hardening, cyclic bend, plastic deformations, low-alloy steel, yield point, hardness.

УДК 519.6

Канд. техн. наук А. М. Поляков, М. А. Колесова, Е. А. Чепенюк

Национальный технический университет, г. Севастополь

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ ПОДВИЖНОСТИ

В работе приводится обоснование численно-аналитического метода решения обратных задач кинематики шарнирных механизмов с несколькими степенями подвижности. Предложен конструктивный подход к разрешению проблемы кинематической избыточности механизмов, основанный на использовании одного или нескольких критериев качества движения звеньев.

Ключевые слова: механизм, манипулятор, обратная задача кинематики, нелинейное уравнение, численное решение.

1 Постановка проблемы

При решении задач кинематики шарнирных механизмов, представляющих собой открытые или замкнутые кинематические цепи, система уравнений свя-

зей может быть получена аналитически на основе различных методов, например: методом замкнутых векторных контуров [1], координат [2] и др. [3, 4, 5]. Как правило, выбор того или иного метода определяется

характером решаемой задачи и эффективностью его реализации.

В случаях, когда механизм представлен совокупностью низших кинематических пар, уравнения связей трансцендентны и их решения в аналитической форме не всегда возможны, а иногда и нецелесообразны. Для получения численных решений чаще всего используют метод Ньютона или его модификации. Но, как известно, этот метод эффективен в случае выбора начальных приближений в ограниченных окрестностях действительных корней систем уравнений [6].

Во многих практически важных случаях система трансцендентных уравнений может быть преобразована к системе нелинейных алгебраических (полиномиальных) уравнений. Решение таких систем существенно проще по сравнению с системами нелинейных уравнений общего вида. В частности, для них достаточно просто формализуется алгоритм исключения неизвестных, строящийся на основе теоремы Сильвестра о результате двух полиномов [7], который может быть вычислен, например, как определитель матрицы Сильвестра $S(f, g)$ [8]. Вычисление результата для каждой пары уравнений связей (одно из которых фиксировано) относительно одной неизвестной приводит к уменьшению числа уравнений системы и, соответственно, числа неизвестных на единицу. Таким образом, на $n-1$ шаге (n – число неизвестных) исходная система уравнений может быть сведена к треугольной форме вида

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0 \\ u_2(x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0 \\ \dots \\ u_n(x_n) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Другой подход к исключению неизвестных из системы полиномиальных уравнений, получивший широкое распространение в последние десятилетия, базируется на вычислении стандартных базисов G (базисов Гребнера) [9]. В этом случае левые части полиномиальных уравнений связей $f_k = 0$, $f_k \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $k = 1, \dots, m$ представляются в форме системы генераторов базиса $B = (f_1, f_2, \dots, f_m)$.

Базисы Гребнера G были представлены Б. Бухбергером [10], который доказал, что алгоритм их вычисления конечен и может быть реализован посредством последовательности однотипных действий, состоящей из k шагов [11]. В этом случае, так же, как и при использовании метода результата, система полиномиальных уравнений преобразуется к виду (1).

Необходимо отметить, что в некоторых практических случаях определенных вычислительных преимуществ можно достичь, используя комбинированный подход Гребнера-Сильвестра [12].

Если уравнения исходной системы линейны, то оба описанных выше алгоритма подобны «прямому ходу» алгоритма Гаусса. Во всех других случаях уравнения остаются нелинейными и исходная система только приобретает треугольную форму вида (1), удобную для решения. Процедура поиска действительных корней при этом может быть построена подобно «обратному ходу» алгоритма Гаусса, а решение каждого из нелинейных алгебраических уравнений $u_n(x_n) = 0$, $u_{n-1}(x_{n-1}) = 0, \dots, u_1(x_1) = 0$ может быть выполнено одним из множества известных методов. Мы предлагаем для поиска действительных корней полиномиальных уравнений использовать алгоритм, разработанный на основе рекуррентной формулы (2) [13], который эффективен в широком диапазоне начальных приближений при решении уравнений, характерных для множества важных практических задач:

$$k_{j+1} = k_j \cdot \frac{\sum_{i=0}^n (n-i) \cdot A_{n-i} \cdot k_j^i}{\sum_{i=0}^n (n-i-1) \cdot A_{n-i} \cdot k_j^i}, \quad (2)$$

где k_j, k_{j+1} – приближенные значения одного из действительных корней на j -й и $j+1$ -й итерациях, соответственно; A_i – коэффициенты полинома, $i = 0, \dots, n$.

Целью данной работы является обоснование численно-аналитического подхода, представленного выше, на основе решения практических задач кинематики шарнирных механизмов с несколькими степенями подвижности и получение оценок различных вариантов его реализации.

2 Практическая реализация метода

Решение обратной задачи кинематики проиллюстрируем на примере плоского восьмизвездного манипулятора параллельной структуры.

Кинематическая схема манипулятора, представляющего собой механизм с $W = 3$ и, следовательно, обладающего избыточной подвижностью, показана на рис. 1.

Пусть в данном манипуляторе звенья AB , DE и GH являются входными, а звено CFK , с базовой точкой O которого связывается рабочий орган – выходным. При решении обратной задачи кинематики будем предполагать, что траектория точки O задана (в данном примере это окружность радиуса r с центром в точке

$$S\left(\frac{x_D}{2}, \frac{y_D}{2}\right).$$

Кинематическая схема манипулятора характеризуется тремя замкнутыми контурами: $ABC OFEDA$, $ABC OKHGA$ и $DEFO KHGD$. Если условно считать точку O фиксированной в данный момент времени в не-

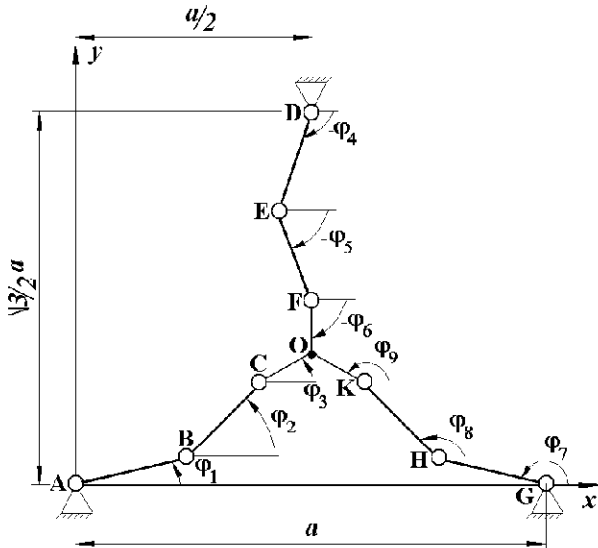


Рис. 1. Кинематическая схема плоского восьмизвенного манипулятора параллельной структуры

которой точке, принадлежащей описанной выше окружности, то для однозначного решения прямой задачи кинематики достаточно задать значения двух независимых обобщенных координат, например, φ_1 и φ_7 , а φ_4 рассматривать как функцию $\varphi_4 = f(\varphi_1, \varphi_7)$. При другом подходе можно задать только одну обобщенную координату, например, φ_1 . Но, в таком случае, вследствие кинематической избыточности, число решений прямой задачи кинематики будет равно бесконечности. При этом часть кинематической цепи ABC может принять любую из возможных конфигураций, удовлетворяющих неравенству $\overline{AB} + \overline{BC} \geq \overline{AC}$, а конфигурации цепей AHK и ADE при этом могут быть выбраны из двух возможных вариантов сборки. Но при решении обратной задачи кинематики, если не задан какой-либо дополнительный критерий, достаточно выбрать одну из возможных конфигураций цепи $ABCO$, а, следовательно, и цепей $AGHKO$ и $ADEFO$. В дальнейшем будем считать, что при движении точки O по окружности звено CFK движется поступательно так, что его часть CO всегда расположена горизонтально. Фактически это означает наложение дополнительно условия связи: $\varphi_3 = \varphi_{30} = 0$.

Рассмотрим одну из возможных систем независимых уравнений связей в векторной форме:

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CO} - \overline{AO} &= 0 \\ \overline{AG} + \overline{GH} + \overline{HK} + \overline{KO} - \overline{AO} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

которая эквивалентна системе четырех скалярных трансцендентных уравнений с пятью неизвестными $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_7, \varphi_8)$:

$$\begin{aligned} l \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2 + R \cos \varphi_3 - x &= 0 \\ l \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2 + R \sin \varphi_3 - y &= 0 \\ a + l \cos \varphi_7 + l \cos \varphi_8 - \frac{1}{2} R \cos \varphi_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} R \sin \varphi_3 - x &= 0 \\ l \sin \varphi_7 + l \sin \varphi_8 + \frac{\sqrt{3}}{2} R \cos \varphi_3 - \frac{1}{2} R \sin \varphi_3 - y &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

где приняты следующие обозначения: $l_{AB} = l_{BC} = l_{CH} = l_{HK} = l$; $l_{CO} = l_{KO} = R$. Кроме этого принято, что $\varphi_9 = \frac{2\pi}{3} + \varphi_3$ при $l_{CF} = l_{FK} = l_{KC}$. Произведя замену переменных ($\cos \varphi_i = c\varphi_i$, $\sin \varphi_i = s\varphi_i$) и принимая во внимание тождества $c\varphi_i^2 + s\varphi_i^2 - 1 = 0$, $i = 1, 2, 3, 7, 8$, получим систему 9 полиномиальных уравнений с десятью неизвестными:

$$c\varphi_1, c\varphi_2, c\varphi_3, c\varphi_7, c\varphi_8, s\varphi_1, s\varphi_2, s\varphi_3, s\varphi_7, s\varphi_8.$$

Путем исключения $c\varphi_2, c\varphi_8, s\varphi_1, s\varphi_2, s\varphi_7, s\varphi_8$ методом результата, приходим к системе трех полиномиальных уравнений с четырьмя неизвестными $c\varphi_1, c\varphi_3, c\varphi_7, s\varphi_3$, которая имеет бесконечное множество решений. Но, полагая, в соответствии с принятыми ранее условиями движения, $c\varphi_3 = 1$ и $s\varphi_3 = 0$, приходим к системе двух независимых друг от друга полиномиальных уравнений четвертой степени.

Для численного решения рассматриваемой обратной задачи кинематики были приняты следующие значения кинематических параметров: $l = R = 1, 0$; $r = 0, 3$. Решения получены с использованием подхода, изложенного в первом примере.

На рис. 2, а представлены графики функций $\varphi_i^{зам} = f_i(k)$, где $i = 1, 2, 7, 8$ – номера звеньев; $k = 0 \dots 36$ – номер конфигурации манипулятора, соответствующий k -му положению точки O на окружности радиуса r с центром в точке S ; на рис. 2, б – множество конфигураций манипулятора при движении точки O по окружности (звенья 4 и 5 здесь условно не показаны).

Необходимо отметить, что каждое из конечных уравнений, полученных в результате преобразования исходной системы (4) при всех k имеет четыре действительных корня, но только четыре пары, составленных из них, соответствуют исходной системе. Это означает, что практически могут быть реализованы только четыре возможных варианта сборки манипулятора, показанные на рис. 3:

$$\begin{aligned} AB_1COKH_1G, AB_1COKH_2G, \\ AB_2COKH_1G, AB_2COKH_2G. \end{aligned}$$

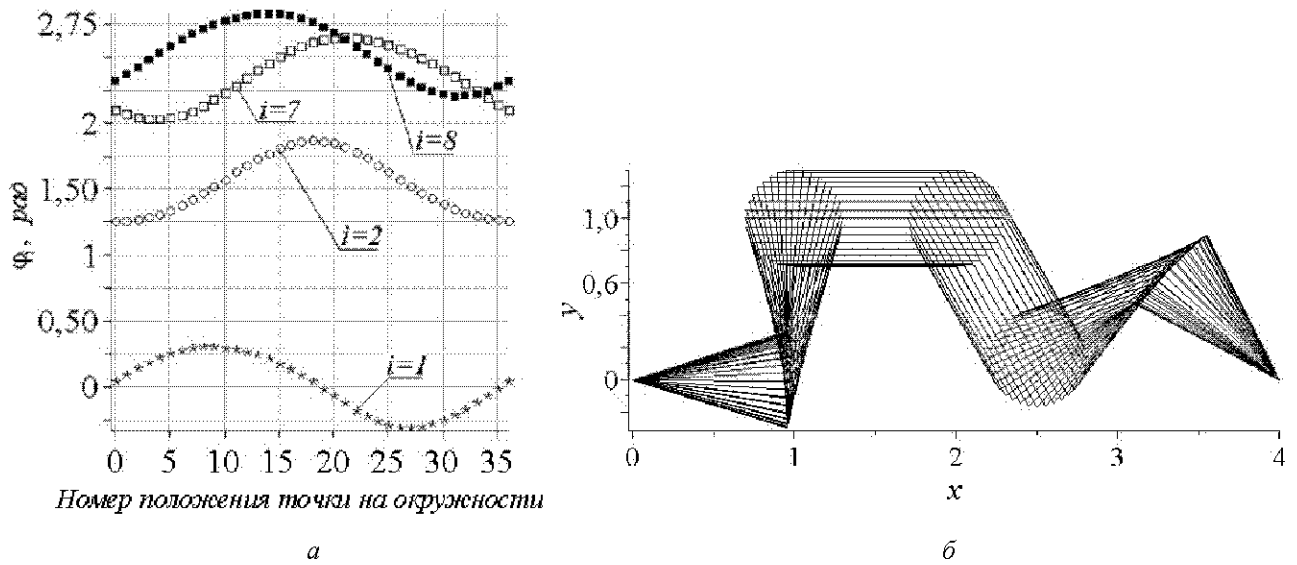


Рис. 2. Результаты решения обратной задачи кинематики манипулятора параллельной структуры:

a – графики функций $\varphi_i^{min} = f_i(k)$; *б* – множество конфигураций манипулятора при движении точки *O* по окружности

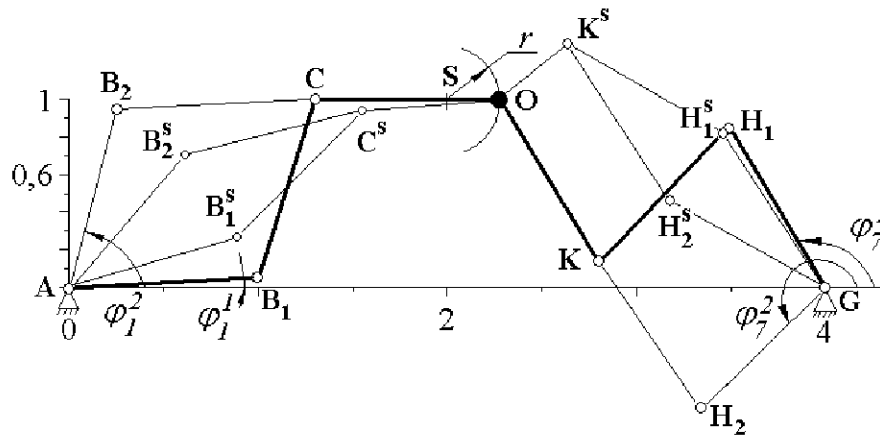


Рис. 3. Возможные и нереализуемые мгновенные конфигурации манипулятора

В целях верификации возможных вариантов сборки в программе, реализующей решение задачи, был реализован поиск всех действительных корней, удовлетворяющих не только конечным уравнениям, но и исходной системе (4) и отклонены по два действительных корня, при которых конфигурации манипулятора $AB_{i(2)}^s C^s OK^s H_{i(2)}^s G$ (рис. 3) не соответствуют системе (4), то есть не могут быть реализованы.

Полученные решения обратной задачи кинематики не являются оптимальными, т. к. одна из обобщенных координат была выбрана произвольно. Ясно, что принимая во внимание какой-либо критерий качества можно получать решения, оптимальные с точки зрения этого критерия. Ниже приведен один из возможных вариантов реализации такого подхода на примере решения обратной задачи кинематики пятизвенного плоского манипулятора последовательной структуры

с $W = 4$, кинематическая схема которого представлена на рис. 4.

Приняв безразмерные значения кинематических параметров: $l_{AB} = 3, l_{BC} = 2, l_{CD} = 1$, запишем систему уравнений связей манипулятора с четырьмя независимыми обобщенными координатами $(s, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$:

$$\begin{aligned} 3 \cos \varphi_1 + 2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - y &= 0; \\ s + 3 \sin \varphi_1 + 2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - x &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Выполним теперь следующую последовательность действий:

- 1) произведем замену переменных $\cos \varphi_i = s\varphi_i, \sin \varphi_i = s\varphi_i$, принимая во внимание тождество $s\varphi_i^2 + s\varphi_i^2 - 1 = 0, i = 1, 2, 3$;

2) произведем лексикографическое упорядочивание переменных:

$$s\varphi_2 \succ c\varphi_2 \succ s\varphi_3 \succ c\varphi_3 \succ s\varphi_1 \succ c\varphi_1 \succ s;$$

3) вычислим полиномы B_j , $j=1, 2, 3, 4$ базиса Гребнера G ;

Наконец, исключая методом результата переменную $s\varphi_1$ из полинома B_1 с учетом тождества $c\varphi_1^2 + s\varphi_1^2 - 1$, получим полиномиальное уравнение $f(s, c\varphi_1, c\varphi_3) = 0$:

$$16 - 32c\varphi_3 + 16c\varphi_3^2 + 48c\varphi_1c\varphi_3y - 48c\varphi_1c\varphi_3s + 16c\varphi_3xy + 48c\varphi_1s - 48c\varphi_1y - 8c\varphi_3s^2 + 8s^2 - 16sy - 28x^2 + 8y^2 - 8c\varphi_3y^2 - 8c\varphi_3x^2 - 36c\varphi_1s^2y - 72c\varphi_1^2sy + 36c\varphi_1sy^2 + 12c\varphi_1sx^2 + 12c\varphi_1s^3 + 36c\varphi_1^2s^2 - 4s^3y + 6x^2y^2 + 2s^2x^2 + 36c\varphi_1^2y^2 + 36c\varphi_1^2x^2 + s^4 + 2x^2y^2 - 4sy^3 - 12c\varphi_1y^3 + y^4 + x^4 - 4sx^2y - 12c\varphi_1x^2y = 0.$$

Его однозначное решение возможно только с учетом каких-либо дополнительных условий или критериев. Например, в этом случае можно использовать критерий минимального дискомфорта [14], обоснованный с биомеханической точки зрения [15]:

$$K = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n (\gamma_i q_i^{norm} + G \times QU_i + G \times QL_i) \Rightarrow \min, \quad (6)$$

где $q_i, q_{Ni}, q_{Ui}, q_{Li}$ – i -я обобщенная координата, ее нейтральное, минимальное и максимальные значения, соответственно; $q_i^{norm} = \frac{q_i - q_{Ni}}{q_{Ui} - q_{Li}}$; γ_i и G – весовые коэффициенты;

$$QU_i = \left\{ 0.5 \sin \left[\frac{5.0(q_{Ui} - q_i)}{q_{Ui} - q_{Li}} + \frac{\pi}{2} \right] + 1 \right\}^{100};$$

$$QL_i = \left\{ 0.5 \sin \left[\frac{5.0(q_i - q_{Li})}{q_{Ui} - q_{Li}} + \frac{\pi}{2} \right] + 1 \right\}^{100}.$$

Смысл критерия (6) состоит в том, что механизму (или другой механической системе) с обобщенными q_i запрещается принимать конфигурации, в которых $q_i \rightarrow q_{Ui}$ или $q_i \rightarrow q_{Li}$, а желательными являются конфигурации, в которых $q_i \rightarrow q_{Ni}$.

Ясно, что в соответствии с условиями данной примера, а также при решении других подобных задач, критерии, позволяющие получать однозначные решения, могут быть выбраны с различных точек зрения. Но одно из преимуществ критерия (6) состоит в том, что предполагаемые конфигурации механизма, которые могут быть получены при его реализации, отличаются от сингулярных, характеризующихся снижением качества управления приводными двигателями.

Произведем замену переменных $q_1 = s$, $q_2 = c\varphi_1$, $q_3 = c\varphi_3$ и зададим возможные границы их изменения:

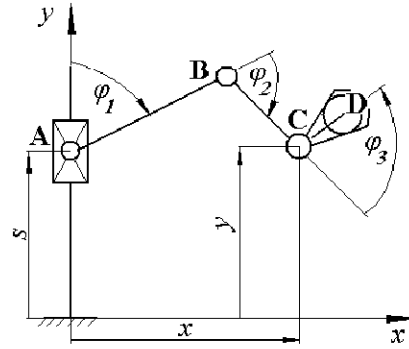


Рис. 4. Кинематическая схема плоского пятизвенного манипулятора последовательной структуры

$$s^{\min} \leq s \leq s^{\max}; c\varphi_1^{\min} \leq c\varphi_1 \leq c\varphi_1^{\max};$$

$$c\varphi_3^{\min} \leq c\varphi_3 \leq c\varphi_3^{\max}. \quad (7)$$

С целью получения возможности формализации процесса исключения неизвестных методом результата, разложим правую часть критерия (6) в ряд Тейлора по степеням q_i в окрестностях q_{Ni} . В результате получим некоторый полиномиальный критерий K^* , который, в общем, аналогичен критерию (6), если количество членов разложения достаточно велико.

Целевую функцию F представим в следующем виде:

$$F(s, c\varphi_1, c\varphi_3, \lambda) = K^*(s, c\varphi_1, c\varphi_3) + \lambda U(s, c\varphi_1, c\varphi_3), \quad (8)$$

где λ – множитель Лагранжа.

Необходимые условия экстремума функции (8) имеют вид:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0; \frac{\partial F}{\partial c\varphi_1} = 0; \frac{\partial F}{\partial c\varphi_3} = 0; \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0. \quad (9)$$

Применяя последовательно метод результата для исключения переменных $\lambda, c\varphi_1, s$ из уравнений (9) приходим к полиномиальному уравнению $g(c\varphi_3) = 0$, решение которого найдем с помощью рекуррентной формулы (2). Реализация в дальнейшем процедуры «обратного хода» позволяет достаточно просто определить и другие неизвестные.

В графической форме решения обратной задачи кинематики манипулятора последовательной структуры при движении базовой точки D рабочего органа по окружности радиуса r с центром в точке $S(x_0, y_0)$ представлены на рис. 5. При этом были приняты следующие безразмерные значения параметров: $r = 0,8$; $x_0 = 3,0$; $y_0 = 2,0$; $0 \leq c\varphi_1 \leq 1,0$; $0 \leq c\varphi_3 \leq 1,0$; $1,0 \leq s \leq 3,0$.

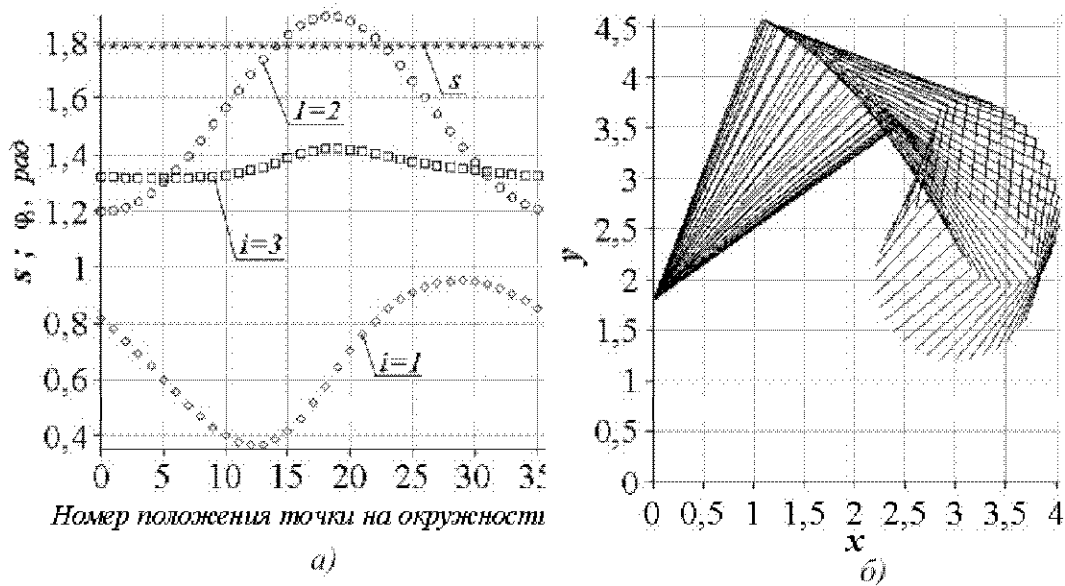


Рис. 5. Решения обратной задачи кинематики манипулятора последовательной структуры при движении точки D по окружности:

a – графики функций $\varphi_i = f_i(k)$, $i = 1, 2, 3$ и $s = f_4(k)$; b – множество конфигураций манипулятора

3 Выводы

Анализ решений приведенных выше и других примеров свидетельствует об эффективности предложенного численно-аналитического подхода к решению задач кинематики шарнирных механизмов с одной или несколькими степенями подвижности. Тем не менее, необходимо отметить, что при решении достаточно сложных задач их полная формализация практически невозможна. Это обусловлено несколькими причинами.

Во-первых, все многосвязные шарнирные механизмы характеризуются множеством вариантов сборки, допускаемых связями. Поэтому при решении как прямых, так и обратных задач кинематики на определенном этапе всегда возникает необходимость неформального выбора одного из таких вариантов. Для этого необходимо иметь все действительные решения системы уравнений связей механизма.

Во-вторых, как правило, при реализации процедуры формального исключения неизвестных, производятся неэквивалентные преобразования исходной системы уравнений связей, что часто приводит к появлению «лишних» действительных корней. Их устранение, в большинстве случаев, также осуществляется путем неформального анализа.

Рекуррентная формула (2) эффективна при поиске всех действительных корней полиномиальных уравнений, так как итерационные процессы, основанные на ее использовании, практически не зависят от выбо-

ра начального приближения [13]. В то же время, в тех случаях, когда начальные приближения принадлежат достаточно малым окрестностям действительных корней, такие процессы, аналогичны итерационным процессам, реализуемым в соответствии с методом касательных Ньютона. Этот факт используется при реализации алгоритмов расчета множества конфигураций механизмов. При этом решения, полученные для одной из конфигураций, например $k - 1$ -й, принимаются в качестве начальных приближений для определения следующей k -й конфигурации.

К недостаткам изложенного в данной работе подхода следует отнести большие вычислительные затраты, необходимые для расчета определителей матриц Сильвестра и базисов Гребнера при реализации алгоритмов исключения неизвестных из системы уравнений связей. Результирующее полиномиальное уравнение, получаемое при этом, имеет достаточно высокую степень. Тем не менее, при реализации алгоритмов решения в системе Matlab или при программировании на алгоритмических языках высокого уровня (например, C++), можно считать эти недостатки несущественными.

Дальнейшие исследования в данной области будут посвящены обобщению изложенного метода и разработке алгоритмов его реализации при решении задач кинематического анализа и синтеза пространственных механизмов, в том числе, и с избыточными связями.

Список литературы

1. Зиновьев В. А. Кинематический анализ пространственных механизмов / В. А. Зиновьев // АН СССР. Труды семинара по ТММ. – 1951. – Т. XI. – № 42. – С. 52–99.
2. Морощкин Ю. Ф. О формах основных уравнений геометрии механизмов / Ю. Ф. Морощкин // Доклады АН СССР. – 1953. – Вып. 91. – № 4. – С. 745–748.
3. Denavit J. A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices / J. Denavit, R. S. Hartenberg // Trans. ASME Journal. Appl. Mech. – 1955. – Vol. 23. – P. 215–221.
4. Uiker J.J. An Iterative Method for the Displacement Analysis of Spatial Mechanisms / J.J. Uiker, J. Denavit, R.S. Hartenberg // Trans. ASME Journal. Appl. Mech. – 1964. – Vol. 31. – P. 303–314.
5. Кислицын С.Г. Тензорный метод в теории пространственных механизмов / С. Г. Кислицын // АН СССР. Труды семинара по ТММ. – 1954. – Т. XIV. – № 54. – С. 51–55.
6. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 1987. – 600 с.
7. Van Waerden B. L. Algebra. Vol. 1 / B.L. Van Waerden. – New York: Frederick Ungar Publishing, 1970. – 265 p.
8. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука. – 832 с.
9. Jager C. A Combined Method for Enclosing All Solutions of Nonlinear Systems of Polynomial Equations / C. Jager, D. Ratz // Reliable Computing. – 1995. – Vol. 1. – P. 41–64.
10. Buchberger B. Theoretical Basis for the Reduction of Polynomials to Canonical Forms / B. Buchberger // SIGSAM Buletin. – 1976. – Vol. 39. – P. 19–29.
11. Buchberger B. Some Properties of Groebner Bases for Polynomial Ideals / B. Buchberger // SIGSAM Bulletin. – 1976. – Vol. 40. – P. 19–24.
12. Dhingra A.K. A Groebner-Sylvester Hybrid Method for Closed-Form Displacement Analysis of Mechanisms / A. K. Dhingra, A. N. Almadi, D. Kohli // Journal of Mechanical Design. – 2000. – Vol. 122. – P.431–438.
13. Поляков А. М. Рекуррентная формула для нахождения действительных корней нелинейных алгебраических уравнений в приложении к задачам механики механизмов / А. М. Поляков, М. А. Полякова // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2002. – № 2. – С. 93–96.
14. Cruse H. On the cost functions for the control of the human arm movement / H. Cruse, E. Wischmeyer, M. Bruwer, P. Brockfeld, A. Dress // Biological Cybernetics. – 1990. – Vol. 62. – P. 519 – 528.
15. Jung ES. Human reach posture prediction based on psychophysical discomfort / ES. Jung, J. Choe // International Journal of Industrial Ergonomics. – 1996. – Vol. 18. – P. 173–179.

Одержано 17.10.2011

Поляков О.М., Колесова М.О., Чепенюк О.О. Чисельно-аналітичний метод розв'язання задач кінематики шарнірних механізмів з декількома ступенями рухомості

У роботі наводиться обґрунтування чисельно-аналітичного методу розв'язання зворотніх задач кінематики шарнірних механізмів з декількома ступенями рухомості. Запропоновано конструктивний підхід до вирішення проблеми кінематичної надмірності механізмів, заснований на використанні одного чи кількох критеріїв якості руху ланок.

Ключові слова: механізм, маніпулятор, зворотня задача кінематики, нелінійне рівняння, чисельне рішення.

Polyakov A., Kolesova M., Chepenyuk E. A numerical-analytical method for the kinematic problems solving of linkages with several degrees of freedom

The substantiation of the numerically-analytical approach for solving inverse kinematic problems of linkages with open and closed kinematic chains was grounded. Constructive approach for solving the problem of mechanisms kinematic redundancy, based on the use of one or more criteria of links movement quality was proposed.

Key words: mechanism, manipulator, inverse kinematic problem, nonlinear equation, numerical solution.