III МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В МЕТАЛУРГІЇ ТА МАШИНОБУДУВАННІ

УДК 536.2

Канд. физ.-мат. наук В. К. Хижняк, канд. техн. наук В. С. Левада, канд. техн. наук Т. И. Левицкая

Национальный технический университет, г. Запорожье

ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ, НАГРУЖЕННОЙ ПОДВИЖНЫМИ ТЕПЛОВЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Решена задача изгиба пластины, имеющей вид бесконечной полосы, находящейся под действием двух точечных источников тепла, движущихся в одном направлении на одинаковых расстояниях от краёв пластины.

Ключевые слова: *термоупругость, пластина, бесконечная полоса, изгиб, источник тепла, подвижная нагрузка.*

Постановке, исследованию и решению задач термоупругости посвящено большое количество работ, что обусловлено исследованием процессов, моделируемых задачами термоупругости.

Проблемы термоупругости подробно исследованы в монографиях [1–3]. Задачи термоупругости при действии движущихся источников тепла рассматривались в работах [4, 5].

В данной работе изучается изгиб пластины, представляющей собой бесконечную полосу шириной $2l$ и толщиной h, под действием двух движущихся по прямой точечных источников тепла. Распределение температуры в этой полосе описывается уравнением [6]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a^2\Delta\theta + b^2\theta = V\big(\delta(y-y_0)+\delta(y-2l+y_0)\big)\cdot\delta(x-v_0t)\,, \quad (1)$$

$$y\in(0,2l)\,,\quad y_0\in(l,2l)\,,\quad x\in R\,,\quad t\in R$$

с граничными условиями

$$\left.\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}-\lambda\theta\right)\right|_{y=0} = \left.\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}+\lambda\theta\right)\right|_{y=2l} = 0\,,\quad \theta\big|_{t=-\infty}=0\,,$$

$$\theta\to 0 \text{ при } x\to\pm\infty\,, \quad (2)$$

$$\theta = m\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Tzdz\,,$$

где $a^2=\dfrac{\lambda}{c\rho}$, $b^2=\dfrac{12a^2}{h^2}+\dfrac{6k}{c\rho h}$, $V=\text{const}$, λ – коэффициент теплопроводности, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность материала, k – коэффициент теплоотдачи, v_0 – скорость подвижного источника, Δ – оператор Лапласа, T – температура, $m=\text{const}$, h – толщина пластины, $\delta(z)$ – функция Дирака.

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде $\theta=\theta(\xi,y)$, где $\xi=x-v_0t$.

Учитывая симметричность теплового излучения, получим следующую задачу:

$$\Delta\theta+\frac{v_0}{a^2}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\frac{b^2}{a^2}\theta=-\frac{V}{a^2}\delta(y-y_0)\delta(\xi) \quad (3)$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial y}\right|_{y=l}=0\,,\quad \left.\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}+\lambda\theta\right)\right|_{y=2l}=0$$

$$\theta\to 0 \quad \text{при} \quad \xi\to\pm\infty\,. \quad (4)$$

Условие (4) гарантирует выполнение условий (2).
Решение задачи (3), (4) будем искать в виде

$$\theta(\xi,y)=\sum_{k=1}^{\infty}U_k(\xi)\,Y_k(y)\,, \quad (5)$$

где $Y_k(y)$ – решения задачи на собственные значения

$$Y_k'' + \mu^2 Y_k = 0$$

$$\left.\frac{dY_k}{dy}\right|_{y=l} = 0\,,\quad \left.\left(\frac{dY_k}{dy} + \lambda Y_k\right)\right|_{y=2l} = 0\,,$$

$$Y_k(y) = \cos\mu_k(y-l)\,,$$

здесь μ_k – корни уравнения $tg\mu_l = \frac{\lambda_l}{\mu_l}$.

Подставив (5) в (3) и, учитывая граничные условия (4), получим

$$\frac{d^2U_k}{d\xi^2} + \frac{v_0}{a^2}\frac{dU_k}{d\xi} - \left(\mu_k^2 + \frac{b^2}{a^2}\right)U_k = V_0 \cdot \delta(\xi)\,, \qquad (6)$$

$$U_k \xrightarrow{\xi\to\pm\infty} 0\,, \qquad (7)$$

где $V_0 = -\frac{V}{a^2}\mu_k \cos\mu_k y_0$.

Решение задачи (6), (7) имеет вид

$$U_k(\xi) = \frac{V}{S_k} e^{-\frac{\xi v_0 + |\xi| S_k}{2a^2}} \cos\mu_k y_0\,, \qquad (8)$$

где $s_k^2 = v_0^2 + 4a^4\mu_k^2 + 4a^2b^2$.

Таким образом, окончательно получим

$$\theta(\xi, y) = V\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\mu_k y_0}{s_k} e^{-\frac{\xi v_0 + |\xi| S_k}{2a^2}} \cos\mu_k y. \qquad (9)$$

Далее рассмотрим изгиб пластины, шарнирно опертой по краям [6]:

$$\Delta^2 W - \frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \alpha(1-\nu)\Delta\theta\,, \qquad (10)$$

$$\left.W\right|_{\substack{y=0\\y=2l}} = \left.\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right|_{\substack{y=0\\y=2l}} = 0\,,$$

$$\left.W\right|_{x\to\pm\infty} \to 0\,,\quad \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x\to\pm\infty} \to 0\,, \qquad (11)$$

где α и ν – коэффициенты теплового расширения и Пуассона, D – жесткость пластины.

Перейдем к подвижной системе координат, полагая $\xi = x - v_0 t$ и

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = v_0^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}.$$

Решение задачи (10)–(11) найдем с помощью функции Грина, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta^2 G - \beta^2\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = A\delta(y-y_1)\delta(\xi-\xi_1) \qquad (12)$$

и граничным условиям

$$\left.G\right|_{\substack{y=0\\y=2l}} = \left.\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right|_{\substack{y=0\\y=2l}} = 0\,,$$

$$\left.G\right|_{\xi\to\pm\infty} \to 0\,,\quad \left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi\to\pm\infty} \to 0\,, \qquad (13)$$

где $A = \frac{1}{D}$, $\beta^2 = \frac{\rho h}{D}$.

Решение задачи (12), (13) представим в виде

$$G(\xi, y, \xi_1, y_1) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\xi, \xi_1)\sin\frac{k\pi y}{2l}\sin\frac{k\pi y_1}{2l}, \qquad (14)$$

где g_k являются решением уравнения

$$\frac{d^4 g_k}{d\xi^4} - (2\mu_k^2 + \beta^2)\frac{d^2 g_k}{d\xi^2} + \mu_k^4 g_k = A_0\delta(\xi-\xi_1) \qquad (15)$$

при условии

$$\left.g_k\right|_{\xi\to\pm\infty} \to 0\,,\quad \left.\frac{dg_k}{d\xi}\right|_{\xi\to\pm\infty} \to 0\,, \qquad (16)$$

где $A_0 = \frac{1}{D}\sin\mu_k y$, $\mu_k = \frac{k\pi}{2l}$.

Решая задачу (15), (16), получим

$$g_k(\xi, \xi_1) = \frac{\sin\mu_k y_1}{Dl(m_k^2 - n_k^2)}\left(\frac{e^{-m_k|\xi-\xi_1|}}{m_k} + \frac{e^{-n_k|\xi-\xi_1|}}{n_k}\right), \qquad (17)$$

где $$m_k = \sqrt{\mu_k^2 + \beta^2 + \sqrt{\mu_k^2\beta^2 + \beta^4}}\,,$$

$$n_k = \sqrt{\mu_k^2 + \beta^2 - \sqrt{\mu_k^2\beta^2 + \beta^4}}\,.$$

Таким образом, окончательно получим

$$G(\xi, y, \xi_1, y_1) =$$
$$= \frac{1}{Dl}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m_k^2 - n_k^2}\left(\frac{e^{-m_k|\xi-\xi_1|}}{m_k} + \frac{e^{-n_k|\xi-\xi_1|}}{n_k}\right)\sin\frac{k\pi y}{2l}\sin\frac{k\pi y_1}{2l}. \qquad (18)$$

Решение задачи (10), (11) с учетом (9), (8) запишем в виде

$$W(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{2l} G(\xi, y, \xi_1, y_1) \alpha (1-\nu) \Delta\theta(\xi_1, y_1) d\xi_1 dy_1$$

или

$$W(\xi, y) = \frac{\alpha(1-\nu)V}{Dl} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{2l} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k^2 - n_k^2} \left(\frac{e^{-m_k|\xi-\xi_1|}}{m_k} + \frac{e^{-n_k|\xi-\xi_1|}}{n_k} \right) \sin\frac{k\pi y}{2l} \sin\frac{k\pi y_1}{2l} \right) \times$$

$$\times \Delta \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\mu_n(y_0 - l)}{s_n} e^{-\frac{\xi_1 v + |\xi_1| S_n}{2a^2}} \cos\mu_n(y_1 - l) \right) d\xi_1 dy_1 .$$

В результате интегрирования решение (10), (11) принимает вид

$$W(\xi, y) = \frac{\alpha(1-\nu)V\pi}{Dl^2} \sum_{\substack{k=1 \\ p=1,3,5,...}}^{\infty} \cos\mu_k l \frac{\cos\mu_k(y_0 - l)}{s_k} \frac{p}{\left(\frac{p\pi}{2l}\right)^2 - \mu_k^2} \frac{\sin\frac{p\pi y}{2l}}{m_p^2 - n_p^2} \times I_{p,k}(\xi).$$

При $\xi > 0$

$$I_{p,k}(\xi) = \left[\frac{2m_p e^{-\frac{v_0+s_k}{2a^2}\xi} - \left(m_p + \frac{v_0+s_k}{2a^2}\right) e^{-m_p\xi}}{m_p\left(m_p^2 - \frac{(v_0+s_k)^2}{4a^4}\right)} + \frac{2n_p e^{-\frac{v_0+s_k}{2a^2}\xi} - \left(n_p + \frac{v_0+s_k}{2a^2}\right) e^{-n_p\xi}}{n_p\left(n_p^2 - \frac{(v_0+s_k)^2}{4a^4}\right)} \right] \left(\frac{(v_0+s_k)^2}{4a^4} - \mu_k^2 \right) +$$

$$+ \left[\frac{e^{-m_p\xi}}{m_p\left(m_p - \frac{v_0-s_k}{2a^2}\right)} + \frac{e^{-n_p\xi}}{n_p\left(n_p - \frac{v_0-s_k}{2a^2}\right)} \right] \left(\frac{(v_0-s_k)^2}{4a^4} - \mu_k^2 \right).$$

При $\xi < 0$

$$I_{p,k}(\xi) = \left[\frac{2m_p e^{-\frac{v_0-s_k}{2a^2}\xi} - \left(m_p - \frac{v_0-s_k}{2a^2}\right) e^{m_p\xi}}{m_p\left(m_p^2 - \frac{(v_0-s_k)^2}{4a^4}\right)} + \frac{2n_p e^{-\frac{v_0-s_k}{2a^2}\xi} - \left(n_p - \frac{v_0-s_k}{2a^2}\right) e^{n_p\xi}}{n_p\left(n_p^2 - \frac{(v_0-s_k)^2}{4a^4}\right)} \right] \left(\frac{(v_0-s_k)^2}{4a^4} - \mu_k^2 \right) +$$

$$+ \left[\frac{e^{m_p\xi}}{m_p\left(m_p + \frac{v_0+s_k}{2a^2}\right)} + \frac{e^{n_p\xi}}{n_p\left(n_p + \frac{v_0+s_k}{2a^2}\right)} \right] \left(\frac{(v_0+s_k)^2}{4a^4} - \mu_k^2 \right).$$

Или при $\xi = x - v_0 t$

$$W(x,y,t)=\frac{\alpha(1-\nu)V\pi}{Dl^2}\sum_{\substack{k=1\\p=1,3,5,...}}^{\infty}\cos\mu_k l\,\frac{\cos\mu_k(y_0-l)}{s_k}\,\frac{p}{\left(\frac{p\pi}{2l}\right)^2-\mu_k^2}\,\frac{\sin\frac{p\pi y}{2l}}{m_p^2-n_p^2}\times I_{p,k}(x-v_0t).$$

При $x-v_0t>0$

$$I_{p,k}(x-v_0t)=\left[\frac{2m_p e^{-\frac{v_0+s_k}{2a^2}(x-v_0t)}-\left(m_p+\frac{v_0+s_k}{2a^2}\right)e^{-m_p(x-v_0t)}}{m_p\left(m_p^2-\frac{(v_0+s_k)^2}{4a^4}\right)}+\frac{2n_p e^{-\frac{v_0+s_k}{2a^2}(x-v_0t)}-\left(n_p+\frac{v_0+s_k}{2a^2}\right)e^{-n_p(x-v_0t)}}{n_p\left(n_p^2-\frac{(v_0+s_k)^2}{4a^4}\right)}\right]\times$$

$$\times\left(\frac{(v_0+s_k)^2}{4a^4}-\mu_k^2\right)+\left[\frac{e^{-m_p(x-v_0t)}}{m_p\left(m_p-\frac{v_0-s_k}{2a^2}\right)}+\frac{e^{-n_p(x-v_0t)}}{n_p\left(n_p-\frac{v_0-s_k}{2a^2}\right)}\right]\left(\frac{(v_0-s_k)^2}{4a^4}-\mu_k^2\right).$$

При $x-v_0t<0$

$$I_{p,k}(x-v_0t)=\left[\frac{2m_p e^{-\frac{v_0-s_k}{2a^2}(x-v_0t)}-\left(m_p-\frac{v_0-s_k}{2a^2}\right)e^{m_p(x-v_0t)}}{m_p\left(m_p^2-\frac{(v_0-s_k)^2}{4a^4}\right)}+\frac{2n_p e^{-\frac{v_0-s_k}{2a^2}(x-v_0t)}-\left(n_p-\frac{v_0-s_k}{2a^2}\right)e^{n_p(x-v_0t)}}{n_p\left(n_p^2-\frac{(v_0-s_k)^2}{4a^4}\right)}\right]\times$$

$$\times\left(\frac{(v_0-s_k)^2}{4a^4}-\mu_k^2\right)+\left[\frac{e^{m_p(x-v_0t)}}{m_p\left(m_p+\frac{v_0+s_k}{2a^2}\right)}+\frac{e^{n_p(x-v_0t)}}{n_p\left(n_p+\frac{v_0+s_k}{2a^2}\right)}\right]\left(\frac{(v_0+s_k)^2}{4a^4}-\mu_k^2\right).$$

Получено аналитическое решение, позволяющее исследовать напряженное состояние пластины при различных параметрах. Найденная в работе функция Грина дает возможность получать решения о прогибах пластины, вызванных различными видами подвижных нагрузок.

Перечень ссылок

1. Новацкий В. Вопросы термоупругости / Новацкий В. – М. : Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
2. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. – К. : Наукова думка, 1975. – 302 с.
3. Подстригач Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – К. : Наукова думка, 1976. – 311 с.
4. Калоеров С. А. Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / С. А. Калоеров, Ю. С. Антонов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41. – № 9. – С. 127–136.
5. Авраменко Л. Е. Термоупругость тонких пологих оболочек под действием движущегося локального источника тепла / Л. Е.Авраменко // Динамические системы. – 2005. – Вып. 19. – С. 31–37.
6. Болотин В. В. Динамические задачи термоупругости для пластин и оболочек при наличии излучения / В. В. Болотин // Тр. конф. по теор. пластин и оболочек. – Казанский гос. ун-т, Казань. – 1961. – С. 27–32.

Одержано 06.09.2010

Хижняк В.К., Левада В.С., Левицька Т.І. Згин пластини, яка навантажена джерелами тепла, що рухаються

Розв'язано задачу згину пластини, що має вигляд нескінченої смуги та знаходиться під дією двох точкових джерел тепла, які рухаються в одному напрямку на однакових відстанях від країв пластини.

Ключові слова: *термопружність, пластина, нескінченна смуга, згин, джерело тепла, рухоме навантаження.*

Khizhnyak V., Levada V., Levitskaya T. Bending of plates loaded with mobile heat sources

The problem of plate bending, having the form of an infinite strip under the influence of two point heat sources, moving in one direction at equal distances from the edges of the plate is solved.

Key words: *thermoelasticity, plate, infinite strip, bend, heat source, moving load.*