УДК 539.3

Канд. фіз.-мат. наук І. Г. Величко

Національний технічний університет, м. Запоріжжя

ОДНОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ШАРУ З ЖОРСТКИМ ПІВПРОСТОРОМ

Побудовано інтегральні рівняння для визначення зони контакту і контактних напружень між гладким трансверсально-ізотропним шаром та абсолютно жорстким півпростором у випадку плоскої деформації. Чисельно отримано зв'язок між відношенням модулів зсуву шару та шириною смуги контакту.

***Ключові слова**: трансверсально-ізотропний шар, односторонній контакт, плоска деформація, інтегральне рівняння Фредгольма першого роду, ширина смуги контакту, модуль зсуву.*

Вступ

У процесі експлуатації техніки металеві елементи механізмів контактують між собою, в результаті чого вони деформуються. Оскільки великі деформації можуть призвести до виходу механізмів зі строю, то на етапі проектування необхідно вміти визначати зони контакту об'єктів та напруження, які виникають у зонах контакту.

Найбільші складності виникають в тому випадку, коли область контакту невідома, і її потрібно визначити в процесі моделювання. Однією із таких задач є задача про односторонній контакт тіл. У початковому стані тіла мають загальну спільну межу, розмір якої зменшується при навантаженні. У даній статті вивчається конструкція, яка складається з абсолютно жорсткого півпростору та пружного шару. В умовах плоскої деформації шар стискається зосередженою силою, в результаті чого вигинається, і область контакту стає смугою. У роботі [1] ця задача вперше розв'язана для ізотропного шару. У роботі [2] визначається зона контакту у випадку, коли шар та півпростір містять вертикальні циліндричні отвори. В [3] автор розв'язував подібну задачу з урахуванням ефекту термопружності. В [4] досліджується односторонній контакт двох ізотропних пластин. Наскільки відомо автору, подібні дослідження для трансверсально-ізотропного шару до теперішнього часу не проводилися.

Основна частина

Розглядається плоска деформація гладкого шару, що лежить на основі, яка представляє собою абсолютно жорсткий півпростір. Між шаром і основою має місце односторонній контакт (тобто шар під дією нормального навантаження, прикладеного до верхньої межі шару, може відставати від основи). Треба визначити зону контакту між шаром і основою та контактні напруження.

Уведемо локальну декартову систему координат OXZ з початком на верхній межі шару. Ось OX спрямуємо вправо вздовж меж шарів, а ось OZ – униз в глибину основи. Шар будемо характеризувати товщиною h, модулями зсуву G_0, G_1 (модулі зсуву в площині ізотропії й у площинах, перпендикулярних до неї відповідно) та трьома коефіцієнтами Пуасона v, v_1, v_2 [5]. Проекції переміщень точок шару на осі OX та OZ будемо позначати відповідно U та W.

Будемо вважати, що на верхній межі шару прикладена зосереджена нормальна сила, тобто напруження описуються дельта-функцією Дірака

$$\sigma_z(x,0) = Q\delta(x), \tag{1}$$

а на ніжній межі цього шару нормальні напруження

$$\sigma_z(x,h) = q(x), \quad x \in (-b,b).$$

Тут $q(x)$ – шукана функція контактних тисків, а b – шукана ширина смуги контакту. Наявність абсолютно жорсткого півпростору описується наступним чином

$$\frac{\partial W}{\partial x}(x,h) = 0, \quad x \in (-b,b). \tag{2}$$

Дотичні напруження на межах шару відсутні

$$\tau_{xz}(x,0) = \tau_{xz}(x,h) \equiv 0.$$

Рівняння рівноваги для трансверсально-ізотропного шару мають вигляд [5]:

$$\begin{gathered}
\frac{2G_0}{1-v-2v_1v_2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}(1-v_1v_2)+\frac{\partial W}{\partial z}\nu_1(1+v)\right\}+ \\
+G_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)=0, \\
\frac{2G_0(1+v)v_1}{1-v-2v_1v_2}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial z}\frac{(1-v)}{v_2}\right\}+ \\
G_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)=0.
\end{gathered} \tag{3}$$

Ця система розв'язувалася за допомогою перетворення Фур'є (вважаємо, що усі функції, які входять до системи (3), задовольняють умови цього перетворення).

Трансформанти переміщень точок шару та компонент тензора напружень можна виразити через допоміжні функції шару

$$\alpha = H\overline{\sigma_z}\Big|_{Z=0},\ \beta = G_1 p\overline{W}\Big|_{Z=0},\ \gamma = -G_0 S\Big|_{Z=0},\ \delta = -\frac{i\xi}{p}\overline{\tau_{xz}}\Big|_{Z=0},$$

де $H = \dfrac{\nu_2(1-\nu-2\nu_1\nu_2)}{2\nu_1(1+\nu)}$, $p = |\xi|$, $S = i\xi\overline{U}$, наступним чином [6]:

$$S(\xi,z) = \frac{\alpha}{\nabla G}(C_2 - C_1) + \frac{\beta}{\Delta G_1}(Y_2S_1 - Y_1S_2) + \\ + \frac{\gamma}{\nabla G}(L_1C_2 - L_2C_1) + \frac{\delta}{\Delta G_1}(M_2S_1 - M_1S_2),$$

$$p\overline{W}(\xi,z) = \frac{\alpha}{\nabla G}(M_2S_2 - M_1S_1) + \frac{\beta}{\Delta G_1}(M_1Y_2C_1 - M_2Y_1S_1) + \\ + \frac{\gamma}{\nabla G}(L_1M_2S_2 - L_2M_1S_1) + \frac{\delta}{\Delta G_1}M_1M_2(C_1 - C_2).$$

$$H\overline{\sigma_z}(\xi,z) = \frac{\alpha}{\nabla}(L_2C_2 - L_1C_1) + \frac{\beta g}{\Delta}(L_1Y_2S_1 - L_2Y_1S_2) + \\ + \frac{\gamma}{\nabla}L_1L_2(C_2 - C_1) + \frac{\delta g}{\Delta}(L_1M_2S_1 - L_2M_1S_2),$$

$$\overline{\tau_{xz}}(\xi,z) = \frac{\alpha}{\nabla}(Y_1S_1 - Y_2S_2) + \frac{\beta g}{\Delta}Y_1Y_2(C_2 - C_1) + \\ + \frac{\gamma}{\nabla}(L_2Y_1S_1 - L_1Y_2S_2) + \frac{\delta g}{\Delta}(M_1Y_2C_2 - M_2Y_1C_1).$$

Тут $g = G_0/G_1$,

$$t_m = \sqrt{\frac{g-\nu_2}{1-\nu}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\nu_2(1-\nu)(1-\nu_1\nu_2)}{\nu_1(1+\nu)(g-\nu_2)^2}}\right)},\ m = 1,2,$$

$$M_{mk} = \frac{1}{t_m}\frac{2g(1-\nu_1\nu_2) - (1-\nu-2\nu_1\nu_2)t_m^2}{2g(1+\nu)\nu_1 + (1-\nu-2\nu_1\nu_2)},$$

$L_m = M_m t_m(1-\nu) - \nu_2$, $Y_m = M_m + t_m$, $\Delta = M_1t_2 - M_2t_1$,
$\nabla = L_2 - L_1$, $C_m = ch(t_m pz)$, $S_m = sh(t_m pz)$.

Вираз для трансформант переміщень точок нижньої межі шару, з урахуванням відсутності дотичних напружень на межах, має вигляд

$$p\overline{W}(\xi,h) = R\frac{\sigma_1D_1 + \sigma_2D_2}{D}. \quad (4)$$

Тут $D_1(p) = L_2Y_1\tilde{S}_1 - L_1Y_2\tilde{S}_2$,

$D_2(p) = L_1Y_2\tilde{S}_2\tilde{C}_1 - L_2Y_1\tilde{S}_1\tilde{C}_2$, $R = \dfrac{\Delta \cdot H}{G_0}$,

$$D = 2L_1L_2Y_1Y_2\left(1 - \tilde{C}_1\tilde{C}_2\right) + \left(L_1^2Y_2^2 + L_2^2Y_1^2\right)\tilde{S}_1\tilde{S}_2,$$

$\tilde{S}_j = sh(pt_jh)$, $\tilde{C}_j = ch(pt_jh)$,

$\sigma_1 = \overline{\sigma(x,0)} = Q\overline{\delta(x)} = Q$,

$\sigma_2 = \overline{\sigma(x,h)} = 2\int\limits_0^b q(x)\cos\xi x dx$.

Застосувавши до (4) обернене перетворення Фур'є, після перетворень отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду відносно невідомої функції контактних тисків

$$\int\limits_{-b}^{b} q(t)\left\{\frac{1}{t-x} + s\int\limits_0^\infty \frac{d_2}{D}(1-\cos pt)\sin pxdp\right\}dt = \\ = s\int\limits_0^\infty \frac{d_1}{D}\sin pxdx, \quad (5)$$

з додатковою інтегральною умовою рівноваги шару

$$\int\limits_{-b}^{b} q(t)dt = Q.$$

Тут $d_2(p) = D_2 + D/s$, $d_1(p) = D_1 + d_2$, $s = L_2Y_1 - L_1Y_2$.

Оскільки нижня межа шару не має кутових точок, то функцію контактних тисків потрібно шукати у вигляді $q(t) = \sqrt{b^2 - t^2}\cdot q_1(t)$, де $q_1(t)$ – парна обмежена функція, яка має ненульову границю при $x \to b$. [7]. Для отримання чисельних результатів можна скористатися, наприклад, методом скінчених сум [8].

Зауважимо, що зона контакту в цьому випадку не залежить від величини навантаження, а тільки від товщини і пружних характеристик шару. Наведемо графік залежності напівширини зони контакту b від величини $g = G_0/G_1$ при таких значеннях характеристик шару: $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$.

Як показують розрахунки, ширина зони контакту залежить від g лінійно (в межах точності розрахунку та зображеному діапазоні зміни g), і тому при наведених коефіцієнтах Пуассона можна запропонувати емпіричну формулу:

$$2b \approx h(1{,}79 - 0{,}078g).$$

Відоме співвідношення $b = 0{,}86h$ для ширини смуги контакту ізотропного шару, який притискається зосередженою силою [1], є граничним випадком отриманого результату при $g = 1$.

У подальшому планується узагальнити отриманий результат на весь діапазон зміни коефіцієнтів Пуассона.

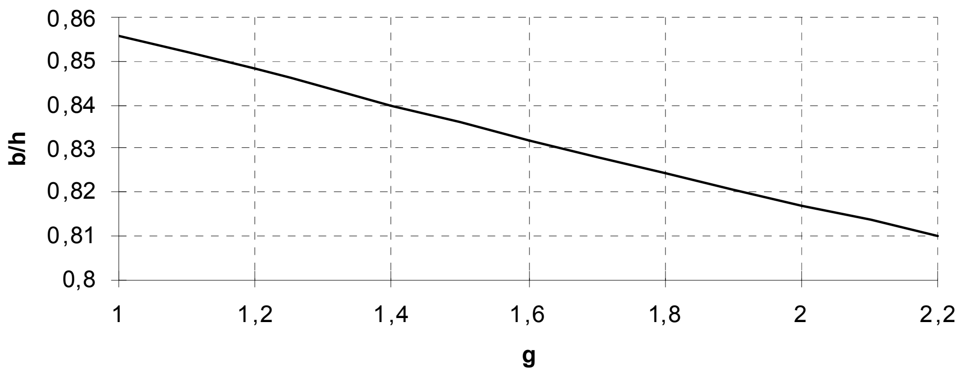

Рис. 1. Залежності напівширини зони контакту *b*/*h* від величини

Список літератури

1. Наумов Ю. А. Об отставании упругого слоя / Наумов Ю. А., Никифорова В. Д. // Прикл. мех. – 1971. – Т. 7, вып.1. – С. 33–40.
2. Величко И. Г. Задача об одностороннем контакте упругого слоя с абсолютно жестким полупространством, содержащим включение / Величко И. Г., Подковалихина Е. А. // Вісник дніпропетровського університету. Серія Механіка. – 2007. – № 2/2. – Т. 2, вып. 11. – С. 35–42.
3. Бобылев А. А. Задача о контактном взаимодействии весомого упругого тела с односторонним жестким нагретым основанием / Бобылев А. А. // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Т. 14. – С. 64–71.
4. Рудой Е. М. Односторонний контакт пластины с тонким упругим препятствием / Е. М. Рудой, А. М. Хлуднев // Сиб. журн. индустр. матем., 12:2 (2009), 120–130.
5. Прусов И. А. Термоупругие анизотропные пластинки / Прусов И. А. – Минск : изд-во БГУ, 1978. – 200 с.
6. Величко І. Г. Розв'язок основних крайових задач плоскої теорії пружності для багатошарових основ з трансверсально-ізотропними шарами / Величко І. Г. // Вісник ЗДУ. Фізико-математичні науки. Біологічні науки. – 1999. – № 2. –С. 21–28.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М. : Наука. – 1966. – 708 с.
8. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. – К. : Наукова думка, 1976. – 443 с.

Одержано 01.06.2013

Величко И.Г. *Односторонний контакт трансверсально-изотропного слоя с жестким полупространством*

Построены интегральные уравнения для определения зоны контакта и контактных напряжений между гладким трансверсально-изотропным слоем и абсолютно жестким полупространством в условиях плоской деформации. Численно получена связь между отношением модулей сдвига слоя и шириной полосы контакта.

***Ключевые слова**: трансверсально-изотропный слой, односторонний контакт, плоская деформация, интегральное уравнение Фредгольма первого рода, ширина полосы контакта, модуль сдвига.*

Velichko I. *The one-sided contact of the smooth transversally-isotropic layer with the solid semispace*

Integral equations for the determination of the contact zone and the contact stresses between the smooth transversally-isotropic layer and the absolutely rigid semispace under the planar deformation have been compiled. Relationship between the ratio of the shear modulus layer and the width of the contact strip numerically obtained.

***Key words:** transversallyl-isotropic layer, unilateral contact, planar deformation, Fredholm integral equation of the first kind, the band width of contact, the shear modulus.*