УДК 539.3

Канд. фіз.-мат. наук І. Г. Ткаченко

Національний університет, м. Запоріжжя

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВПЛИВУ НА РОЗПОДІЛ НОРМАЛЬНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА НИЖНІЙ ГРАНИЦІ ОДНОШАРОВОЇ ОСНОВИ У ВИПАДКУ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Отримано точний розв'язок задачі про визначення форми поверхні термопружного шару, який деформується під впливом поверхневої температури. Розглянуті випадки, коли нижня межа, яка зчеплена з абсолютно жорстким півпростором, теплоізольована або на ній підтримується постійна температура. Чисельно розв'язані задачі, коли область нагріву представляє собою круг, радіус якого дорівнює товщині шару або в три рази перевищує його. Отримані чисельні оцінки впливу температурного режиму нижньої межі шару на форму верхньої межі в області нагріву.

***Ключові слова**: одношарова основа, нормальні переміщення, термопружність, інтегральне перетворення Ханкеля, функція Бесселя.*

Вступ

Пружні багатошарові основи використовуються для моделювання шаруватих конструкцій. На практиці подібні об'єкти зазвичай експлуатуються під впливом температури, тому для них потрібно враховувати й температурні навантаження. Цим самим задачу будемо розглядати у рамках незв'язної термопружності.

Класичними роботами в області термопружності шаруватих середовищ є роботи [1–10]. У роботах [11, 12] для визначення напружено-деформівного стану шаруватих тіл використовуються функції Гріна. Тривимірним задачам термопружності для пластин присвячені статті [13, 14]. Метод розв'язання, що буде застосований в даній статті, був започаткований у [15] для пружних багатошарових основ.

Постановка задачі

Розглянемо пружну одношарову основу, що знаходиться під впливом температурного поля. Під основою ми будемо розуміти шар, який лежить на абсолютно жорсткому півпросторі (рис. 1). Шар в основі вважається однорідним, невагомим та ізотропним. Він характеризується товщиною h, модулем Юнга E, коефіцієнтом Пуассона ν, коефіцієнтом теплопровідності k_T і коефіцієнтом теплового розширення матеріалу α_T. На верхній межі основи нам задані напруження та температура. На межі абсолютно жорсткого півпростору підтримується нульова температура (задача I) або відомо, що тепловий потік дорівнює нулю (задача II). Необхідно визначити термонапруженодеформований стан основи. Поставлену задачу будемо розв'язувати в рамках незв'язаної стаціонарної лінійної теорії термопружності.

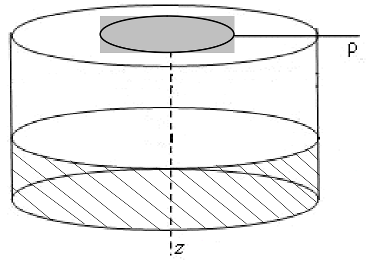

Рис. 1

На верхній межі основи, що те саме, на верхній межі шару, введемо циліндричну систему координат. Задача зводиться до розв'язання наступної системи диференціальних рівнянь для шару [6]:

$$\Delta u - \frac{u}{\rho^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial \rho} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha_T \frac{\partial T}{\partial \rho}, \tag{1}$$

$$\Delta w + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha_T \frac{\partial T}{\partial z}, \tag{2}$$

$$\Delta T = 0. \tag{3}$$

У формулах $u = u_\rho(\rho; z)$, $w = u_z(\rho; z)$ – функції, що описують переміщення точок шару, $T(\rho; z)$ – температура, $e = \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа. Напруження пов'язані з деформаціями за допомогою закону Дюамеля-Неймана [6]:

$$\sigma_z = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_\rho + \varepsilon_\varphi) + \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_z - \frac{E\alpha_T}{1-2\nu}T,$$

$$\tau_{\rho z} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{\rho z}, \tag{4}$$

а деформації з переміщеннями – формулами Коші:

$$\varepsilon_\rho=\frac{\partial u}{\partial\rho},\ \varepsilon_\varphi=\frac{u}{\rho},\ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\ \varepsilon_{\rho z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{\partial u}{\partial z}\right). \quad (5)$$

На границі абсолютно жорсткого півпростору

$$u(\rho;h)=w(\rho;h)=0,$$

Задача I: $T(\rho;h)=0$; Задача II: $\dfrac{\partial T(\rho;h)}{\partial z}=0$.

На верхній межі основи відомими вважаються температура $T(\rho;0)=f(\rho)$ та напруження $\sigma_z(\rho;0)=0,\ \tau_{\rho z}(\rho;0)=0$.

Визначення нормальних переміщень точок верхньої межі шару

Поставлена задача розв'язується за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля [16, 17]:

$$\bar{v}^{\omega}(p;z)=\int_0^{+\infty}\rho v(\rho;z)J_\omega(p\rho)d\rho,$$

$$v(\rho;z)=\int_0^{+\infty}p\bar{v}^{\omega}(p;z)J_\omega(p\rho)dp,$$

де $\bar{v}^{\omega}(\rho)$ – трансформанта Ханкеля порядку ω, J_ω – функція Бесселя першого роду порядку ω, $p\ge 0$ – параметр інтегрального перетворення.

У роботі [18] було показано, що розв'язком системи рівнянь (1)–(3) у просторі трансформант Ханкеля є

$$\begin{aligned}
U(p;z)&=\frac{1+\nu}{2E(1-\nu)}z\,\mathrm{sh}pz\,\alpha+\\
&+\frac{1+\nu}{E(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{\mathrm{sh}pz}{p}+z\,\mathrm{ch}pz\right]\beta+\\
&+\frac{1+\nu}{E}\left[\frac{z\,\mathrm{sh}pz}{1-\nu}+\frac{2\mathrm{ch}pz}{p}\right]\gamma+\\
&+\frac{1+\nu}{2E(1-\nu)}\left[\frac{(3-4\nu)\mathrm{sh}pz}{p}+z\,\mathrm{ch}pz\right]\delta-\\
&-\frac{(1+\nu)\alpha_T}{2(1-\nu)}z\,\mathrm{sh}pz\,\eta-\frac{(1+\nu)\alpha_T}{2(1-\nu)}\left[z\,\mathrm{ch}pz-\frac{\mathrm{sh}pz}{p}\right]\varepsilon,\\
W(p;z)&=\frac{1+\nu}{2E(1-\nu)}\left[\frac{(3-4\nu)\mathrm{sh}pz}{p}-z\,\mathrm{ch}pz\right]\alpha+\\
&+\frac{1+\nu}{E}\left[\frac{2\mathrm{ch}pz}{p}-\frac{z\,\mathrm{sh}pz}{1-\nu}\right]\beta+\frac{1+\nu}{E(1-\nu)}\times\\
&\times\left[(1-2\nu)\frac{\mathrm{sh}pz}{p}-z\,\mathrm{ch}pz\right]\gamma-\frac{1+\nu}{2E(1-\nu)}z\,\mathrm{sh}pz\,\delta+\\
&+\frac{(1+\nu)\alpha_T}{2(1-\nu)}\left[\frac{\mathrm{sh}pz}{p}+z\,\mathrm{ch}pz\right]\eta+\frac{(1+\nu)\alpha_T}{2(1-\nu)}z\,\mathrm{sh}pz\varepsilon,\\
\overline{\sigma_z}(p;z)&=\left[\mathrm{ch}pz-\frac{pz\,\mathrm{sh}pz}{2(1-\nu)}\right]\alpha+\\
&+\frac{1}{1-\nu}[\mathrm{sh}pz-pz\,\mathrm{ch}pz]\beta-\frac{pz\,\mathrm{sh}pz}{1-\nu}\gamma-\\
&-\frac{1}{2(1-\nu)}[(1-2\nu)\mathrm{sh}pz+pz\,\mathrm{ch}pz]\delta+\\
&+\frac{E\alpha_T}{2(1-\nu)}pz\,\mathrm{sh}pz\,\eta+\frac{E\alpha_T}{2(1-\nu)}[pz\,\mathrm{ch}pz-\mathrm{sh}pz]\varepsilon,\\
\overline{\tau_{\rho z}}(p;z)&=\frac{1}{2(1-\nu)}[pz\,\mathrm{ch}pz-(1-2\nu)\mathrm{sh}pz]\alpha+\\
&+\frac{pz\,\mathrm{sh}pz}{1-\nu}\beta+\frac{1}{1-\nu}[\mathrm{sh}pz+pz\,\mathrm{ch}pz]\gamma+\\
&+\left[\frac{1}{2(1-\nu)}pz\,\mathrm{sh}pz+\mathrm{ch}pz\right]\delta-\\
&-\frac{E\alpha_T}{2(1-\nu)}[\mathrm{sh}pz+pz\,\mathrm{ch}pz]\eta-\frac{E\alpha_T}{2(1-\nu)}pz\,\mathrm{sh}pz\,\varepsilon,\\
\bar{T}(p;z)&=\mathrm{ch}pz\,\eta+\mathrm{sh}pz\,\varepsilon.
\end{aligned} \quad (6)$$

Тут $U(p;z)=\bar{u}^1(p;z)$, $W(p;z)=\bar{w}^0(p;z)$, $\bar{T}(p;z)=\bar{T}^0(p;z)$ – трансформанти Ханкеля відповідного порядку, $\varepsilon(p)=\dfrac{1}{p}\dfrac{d\bar{T}(p;z)}{dz}\Big|_{z=0}$, $\eta(p)=\bar{T}(p;0)$,

$\alpha(p)=\overline{\sigma_z}(p;0)$, $\delta(p)=\overline{\tau_{\rho z}}(p;0)$,

$\beta(p)=\dfrac{Ep}{2(1+\nu)}W(p;0)$, $\gamma(p)=\dfrac{Ep}{2(1+\nu)}U(p;0)$ – допоміжні функції шару [19].

Отже, як бачимо, термонапруженодеформівний стан шару визначається шісткою його допоміжних функцій. Три допоміжні функції – $\alpha(p)$, $\delta(p)$ та $\eta(p)$ – можна визначити з граничних умов на верхній межі шару:

$$\alpha(p)=\delta(p)=0,\ \eta(p)=\bar{f}(p);$$

де $\bar{f}(p)$ – трансформанта Ханкеля нульового порядку функції $f(\rho)$, що задає температуру на верхній межі основи. Три інші допоміжні функції – з умов на нижній границі шару. Так як ми хочемо дослідити поведінку лише нормальних переміщень на верхній межі, то нам достатньо знайти допоміжну функцію $\beta(p)$.

Будемо вважати, що функція, що задає температуру на верхній межі основи, має вигляд: $T_0\cdot f(\rho)=T_0\cdot\begin{cases}1, & \rho\le a,\\ 0, & \rho>a,\end{cases}$ а її трансформанта Ханкеля дорівнює $T_0\bar{f}(p)=T_0\cdot\dfrac{aJ_1(ap)}{p}$. Функція $\beta(p)$ для кожної із задач має вигляд: $\beta(p)=\dfrac{\alpha_T E T_0}{2}\cdot\dfrac{\Delta_i^\beta}{\Delta}\bar{f}(p)$.

***Задача* I**:

$$\Delta_1^\beta = \frac{\operatorname{th} ph}{p^2}\left((3-4\nu)\operatorname{ch}^2 ph - 1 + 2\nu\right) + \frac{2h(1-\nu)}{p} + h^2 \operatorname{th} ph.$$

***Задача* II**:

$$\Delta_2^\beta = h^2 \operatorname{cth} ph + \frac{(3-4\nu)\operatorname{sh} ph \operatorname{ch} ph}{p^2} - \frac{2h(1-\nu)}{p},$$

$$\Delta = -\frac{(3-4\nu)\operatorname{ch}^2 ph + (1-2\nu)^2}{p^2} - h^2.$$

Нормальні переміщення точок верхньої межі шару можна знайти, чисельно визначивши значення інтегралу

$$w(\rho;0) = \int_0^{+\infty} pW(p;0)J_0(p\rho)dp = \frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^{+\infty}\beta(p)J_0(p\rho)dp =$$

$$= T_0\alpha_T(1+\nu)\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_i^\beta}{\Delta}\bar{f}(p)J_0(p\rho)dp. \qquad (7)$$

Оскільки, як неважко переконатися безпосередньо, границя $\lim\limits_{p\to\infty}\frac{\Delta_i^\beta}{\Delta} = -1$, то позначимо $\tilde{\Delta}_i = \frac{\Delta_i^\beta}{\Delta} + 1$, і, з урахуванням цього факту, формула (7) набуде вигляду:

$$\frac{w(\rho;0)}{T_0\alpha_T(1+\nu)} = \int_0^{+\infty}\tilde{\Delta}_i\bar{f}(p)J_0(p\rho)dp - \int_0^{+\infty}\bar{f}(p)J_0(p\rho)dp.$$

Перший із цих інтегралів можна обчислити за допомогою чисел, а другий – аналітично.

Чисельні результати

Як приклад розглянемо одношарову основу з наступними характеристиками: $h = 1$, $\nu = 0{,}3$. На поверхні основи задана температура наступним чином:

$$T_a(\rho;0) = T_0 \cdot \begin{cases} 1, & \rho \le a; \\ 0, & \rho > a. \end{cases}$$

На рисунках 2 та 3 наведені графіки нормальних переміщень $-\frac{w(\rho;0)}{T_0\alpha_T(1+\nu)}$ точок верхньої границі основи, в яких температура відрізняється від нуля. Розглядаються два випадки радіус області нагріву: $a = 1$ (рис. 2) та $a = 3$ (рис. 3). Символом I позначено графіки, які належать до випадку, коли на нижній межі підтримується постійна нульова температура. Фізично це означає наявність теплоотводу. Символом II позначено графіки, які належать до випадку теплоізольованої нижньої межі.

Як бачимо із наведених графіків, наявність теплоотводу суттєво впливає на величину деформацій основи.

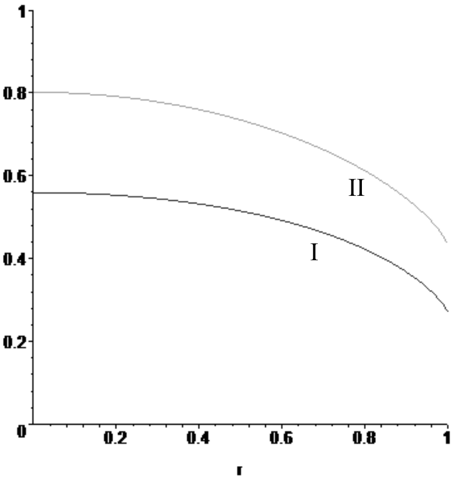

Рис. 2. Нормальні переміщення точок верхньої межі для $a = 1$

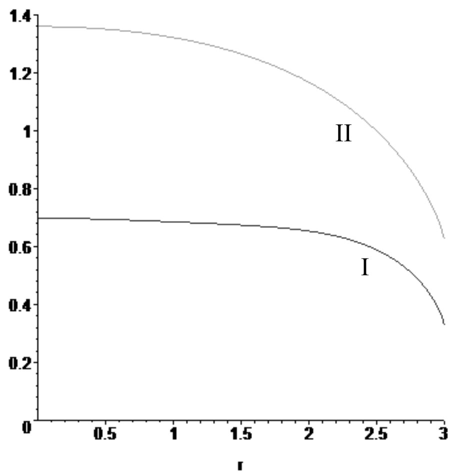

Рис. 3. Нормальні переміщення точок верхньої межі для $a = 3$

Висновки

Розглянута задача про зміну форми одношарової основи під дією статичного температурного поля. За результатами чисельного моделювання було зроблено наступні висновки. У тому випадку, коли радіус плями нагріву збігається з товщиною шару, наявність теплоізоляції на нижній межі призводить до збільшення відповідних нормальних переміщень приблизно на 60 % (при тих же фізичних на геометричних характеристиках). Якщо ж радіус плями нагріву більше в три рази, ніж товщина шару, наявність теплоізоляції на нижній межі призводить до збільшення відповідних нормальних переміщень приблизно на 85 % (при тих же фізичних та геометричних характеристиках).

Збільшення розміру області нагріву призводить до збільшення нормальних подовжень у вертикальному напрямку у відповідних перерізах основи, що узгоджується з фізичним сенсом.

У подальшому планується отримані результати узагальнити на випадок дво- та тришарових основ.

Автор висловлює подяку професору Величку І. Г. за консультації під час роботи над статтею.

Список літератури

1. Блажевський С. Г. Термопружний стан багатошарових симетричних тіл / С. Г. Блажевський, М. П. Ленюк. – К. : Ін-т мат-ки НАН України, 2000. – 130 с.
2. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями / В. М. Вигак. – К. : Наук. думка, 1988. – 312 с.
3. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости / В. Г. Карнаухов. – К. : Наук. думка, 1982. – 258 с.
4. Кіт Г. С. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Г. С. Кіт. – Львів : Ін-т прикл. пробл. мех. і мат. НАН України, 2000. – 401 с.
5. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – К. : Наук. думка, 1970. – 307 с.
6. Новацкий В. Вопросы термоупругости / В. Новацкий. – М. : Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
7. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. – М. : Наука, 1984. – 368 с.
8. Фізико-математичне моделювання складних систем: монографія / [Буряк Я. Й., Чапля Є. Я., Нагірний Т. С. та ін.]. – Львів : Сполом, 2004. – 264 с.
9. Chao Ching-Kong. Mixed boundary-value problems of two-dimensional anisotropic thermoelasticity with elliptic boundaries / Chao Ching-Kong, Gao B. // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – 38, № 34–35. – P. 5975–5994.
10. Chao C. K. Thermoelastic contact between a flat punch and an anisotropic half-space / Chao C. K., Wu S. P., Gao B. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1999. – 66, 2. – P. 548–552.
11. Процюк Б. В. Метод функцій Гріна в осесиметричних задачах пружності та термопружності кусково-однорідних ортотропних тіл / Б. В. Процюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 1. – С. 94–101.
12. Процюк Б. В. Статичні та квазістатичні симетричні задачі термопружності для шаруватих тіл з плоско паралельними границями / Б. В. Процюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 4. – С. 103–112.
13. Алтухов Е. В. Метод однородных решений в трехмерных задачах термоупругости для транстропных пластин / Е. В. Алтухов // Теорет. и прикл. мех. (Киев). – 2003. – № 37. – С. 8–13, 202.
14. Алтухов Е. В. Однородные решения трехмерных задач о распространении гармонических волн в транстропных термоупругих пластинах / Е. В. Алтухов, В. П. Шевченко // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 49–53.
15. Петришин В. И. Основные граничные задачи теории упругости для многослойных оснований / В. И. Петришин, А. К. Приварников // Прикл. механика. – 1965. – 1, № 4. – С. 50–66.
16. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. – М. : Иностранная литература, 1956. – 204 с.
17. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. – М. : Наука, 1983. – 752 с.
18. Величко И. Г. Аналитическое решение осесимметрической задачи термоупругости для многослойного основания [Электронный ресурс] / И. Г. Величко, И. Г. Ткаченко // Вісник Східноукраїнського нац. ун-ту ім. В. Даля. Науковий журнал. – 2009. – № 4. – Режим доступа к журн.: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/Vsunud/2009-4E/09vigdmo.htm
19. Величко І. Г. Плоска термопружна деформація багатошарової основи / І. Г. Величко, І. Г. Ткаченко // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8. – Т. 1, № 6. – С. 154–161.

Одержано 06.06.2013

Ткаченко И.Г. Сравнительный анализ влияния на распределение нормальных перемещений граничных условий на нижней границе однослойного основания в случае осесимметрической деформации

В работе получено точное решение задачи об определении формы поверхности термоупругого слоя, который деформируется под действием поверхностной температуры. Рассмотрены случаи, когда нижняя граница, которая сцеплена с абсолютно жестким полупространством, теплоизолированна или на ней поддерживается постоянная температура. Численно найдены решения задач, когда область нагрева представляет собой круг, радиус которого равен толщине слоя или в три раза превышает его. Получены численные оценки влияния температурного режима нижней границы слоя на форму верхней границы в области нагрева.

Ключевые слова: *однослойное основание, нормальные перемещения, термоупругость, интегральное преобразование Ханкеля, функция Бесселя.*

Tkachenko I. Comparative analysis of the distribution of the normal displacement of the boundary conditions on the lower limit in the case of a single-layer base axisymmetric deformation

Exact solution of the problem of determining the shape of the surface thermoelastic layer that deforms under the influence of the surface temperature is proposed. The cases, where the lower boundary which is bonded to the rigid half-space is thermo-insulated or is at constant temperature are studied. Numerical solving the problems when the heating region is a circle whose radius is equal to the thickness of the layer or three times higher than it was found. Numerical evaluation of the influence of temperature of the lower boundary layer on the shape of the upper boundary of the heating region are proposed.

Key words*: single-layer foundation, normal displacement, thermoelasticity, integral of Hankel transform, Bessel function.*