

8. Силованок В. П. Деформація та руйнування матеріалів біля включень під статичним навантаженням / В. В. Силованок, Р. Я. Юхим // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – № 6. – С. 31–35.
9. Юхим Р. Міцність пружно-пластичних тіл із періодичними системами паралельних та колінеарних включень / Р. Юхим, П. Горбач // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2010. – Т. 15, № 2. – С. 67–72.
10. Антоненко Н. М. Моделирование дископодобной щели в композиті шар-півпростір / Н. М. Антоненко // Сучасні проблеми фізики, хімії та біології. «ФізХімБіо – 2012»: матеріали I міжнар. наук.-техн. конф., Севастополь, 28–30 листопада 2012 р. – Севастополь: СевНТУ, 2012. – С. 41–43.
11. Слепян Л. И. Механика трещин / Л. И. Слепян. – Ленинград: Судостроение, 1981. – 295 с.

Одержано 04.03.2013

#### **Антоненко Н.М. Моделирование дискообразной щели на границе упругого слоя и упругого полупространства**

*Предложен способ решения задачи о дискообразной щели с наполнителем на границе упругого слоя и упругого полупространства. Для построения интегрального уравнения задачи использовано интегральное преобразование Ханкеля. Проанализировано влияние наполнителя щели и толщины слоя на распределение нормальных напряжений на ее берегах.*

**Ключевые слова:** дискообразная щель, наполнитель, интегральное преобразование Ханкеля, интегральное уравнение.

#### **Antonenko N. Modeling of a penny-shaped crack with filler between an elastic layer and an elastic semi-space**

*The problem of a penny-shaped crack with filler between an elastic layer and an elastic semi-space is solved. The integral Hankel transforms has been used. The influence of filler and thickness of layer on the distribution of normal stresses on the edge of the crack has been researched.*

**Key words:** penny-shaped crack, filler, method of Hankel integral transformation, integral equation.

УДК 536.21

М. Г. Олененко, канд. физ.-мат. наук И. Г. Величко

Национальный технический университет, г. Запорожье

## **АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В АНИЗОТРОПНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ**

*Решается двумерная задача о стационарном распределении тепла в анизотропной пластине, состоящей из произвольного конечного числа спаянных параллельных полос. На одной границе задана температура или поток, на другой поддерживается нулевая температура. Решение получено в виде интегралов Фурье. Приведен пример расчета для двухслойной пластины.*

**Ключевые слова:** многослойная анизотропная пластина, температура, тепловой поток, преобразование Фурье, функции податливости.

### **Введение**

В связи с возрастанием технологических требований к материалам, используемым в различных сферах жизни, возникает необходимость разработки математических моделей, описывающих деформацию материалов под действием силовых, температурных, электрических и магнитных полей. Одной из простейших моделей такого типа является несвязная термоупругость.

В этом случае первым этапом решения задач является расчет тепловых полей. Таким задачам для одно-

родных изотропных тел посвящены классические монографии таких авторов, как: В. З. Партон, П. И. Перлин, А. Д. Коваленко, В. Новацкий [1–3]. Для многослойных тел, в связи с трудностями удовлетворения условий на границах сред, авторы, как правило, ограничиваются не более чем двухслойными средами. Исследованию существенно многослойных сред посвящены работы [4, 5]. Для многослойных анизотропных тел аналогичное решение задач термоупругости является открытым вопросом.

Для задач термоупругости изотропных многослойных сред одним из эффективных методов аналитического решения является метод функций податливости [6], который является развитием метода начальных функций Власова [7], и изначально разрабатывался для решения задач упругости многослойных изотропных тел. Использование функций податливости для решения задач о распространении тепла в многослойных изотропных пластинах описано в работе [5]. В данной работе результаты статьи [5] перенесены на случай пластины с анизотропными слоями.

**Постановка задачи**

Рассмотрим анизотропную пластину, состоящую из  $n$  бесконечных параллельных полос, материал каждой из которых является анизотропным, причем одна из осей анизотропии параллельна границам полос, а вторая перпендикулярна. Полосы будем нумеровать сверху вниз, начиная с единицы. В каждом слое введем локальную прямоугольную декартову систему координат, как показано на рисунке 1. Каждая полоса с номером  $i$  характеризуется высотой  $h_i$  и коэффициентами теплопроводности  $K_{ix}, K_{iz}$  и коэффициентами температуропроводности  $\lambda_{ix}, \lambda_{iz}$ , которые связаны между собой соотношениями [8]:  $\lambda_{im} = -\frac{K_{im}}{c_p \rho}$ ,  $m = x, z$ , где

$c_{p_i}$  – изобарная удельная теплоемкость,  $\rho_i$  – плотность. В дальнейшем также будем использовать характеристику  $K_i = \sqrt{K_{ix} K_{iz}}$ . На верхней границе пластины известна температура. На нижней границе пластины поддерживается нулевая температура. Ставится задача описать установившееся тепловое поле.

Распределение температур в  $i$ -й полосе описывается функцией  $T_i(x, z)$ .

Математически решение задачи сводится к решению уравнения:

$$\lambda_{ix} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \lambda_{iz} \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

на каждой из полос. На общей границе полос выполняются условия равенств температур и равенств потоков (закон Фурье) [9]:

$$T_i(x, h_i) = T_{i+1}(x, 0),$$

$$K_{iz} \frac{\partial T_i}{\partial z}(x, h_i) = K_{(i+1)z} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z}(x, 0). \tag{2}$$

Граничные условия задачи:

$$T_1(x, 0) = f(x), T_n(x, h_n) = 0, \tag{3}$$

где  $f(x)$  – заданная функция.

**Метод решения**

Задача решается с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной  $x$ . Предполагается, что все функции, входящие в уравнения, удовлетворяют условиям существования преобразования. В пространстве трансформант уравнение (1) принимает вид:

$$-\tau_i^2 p^2 \bar{T}_i(\zeta, z) + \bar{T}_i''(\zeta, z) = 0, \tag{4}$$

где штрих означает дифференцирование по переменной  $z$ , а  $p = |\zeta|$ ,  $\zeta$  – параметр интегрального преобразования,  $\tau_i^2 = \frac{\lambda_{ix}}{\lambda_{iz}} = \frac{K_{ix}}{c_p \rho} : \frac{K_{iz}}{c_p \rho} = \frac{K_{ix}}{K_{iz}}$ ,  $\tau_i > 0$ .

Общее решение уравнения (4):

$$\bar{T}_i = C_{1i}(\zeta) ch \tau_i p z + C_{2i}(\zeta) sh \tau_i p z. \tag{5}$$

Введем вспомогательные функции для каждой полосы, связанные с трансформантами функций, описывающих температуру и поток на верхней границе полосы:

$$\eta_i(\zeta) = \bar{T}_i(\zeta, 0), \varepsilon_i(\zeta) = \frac{1}{\tau_i p} \bar{T}_i'(\zeta, 0). \tag{6}$$

Подставляя (5) в (6), находим, что  $C_{1i} = \eta_i$ ,  $C_{2i} = \varepsilon_i$ . Таким образом:

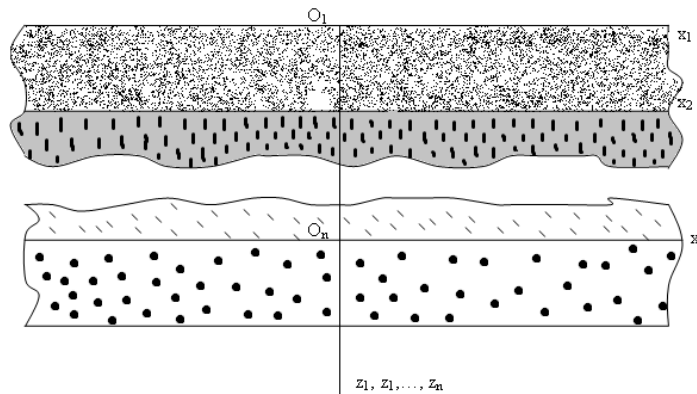


Рис. 1. Многослойная пластина

$$\bar{T}_i(\zeta, z_i) = \eta_i(\zeta)ch\tau_i pz + \varepsilon_i(\zeta)sh\tau_i pz, \quad i = 1, \dots, n.$$

Это означает, что для нахождения температуры в точках  $i$ -й полосы, достаточно определить вспомогательные функции этой полосы.

Условия (2) в пространстве трансформант обращаются в следующие:

$$\bar{T}_i(\zeta, h_i) = \bar{T}_{i+1}(\zeta, 0), \quad K_{iz} \bar{T}_i'(\zeta, h_i) = K_{(i+1)z} \bar{T}_{i+1}'(\zeta, 0).$$

Отсюда получаем зависимость между вспомогательными функциями соседних полос:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}(\zeta) &= \frac{1}{\tau_{i+1}p} \bar{T}_{i+1}'(\zeta, 0) = \frac{K_{iz}}{K_{(i+1)z}} \frac{1}{\tau_{i+1}p} \bar{T}_i'(\zeta, h_i) = \\ &= \frac{K_{iz}}{K_{(i+1)z}} \frac{1}{\tau_{i+1}p} (\tau_i p \eta_i shp_i + \tau_i p \varepsilon_i chp_i) = \\ &= \frac{K_{iz}}{K_{(i+1)z}} \frac{\tau_i}{\tau_{i+1}} (\eta_i shp_i + \varepsilon_i chp_i) = \\ &= \frac{K_i}{K_{i+1}} (\eta_i shp_i + \varepsilon_i chp_i), \end{aligned}$$

$$\eta_{i+1}(\zeta) = \bar{T}_{i+1}(\zeta, 0) = \bar{T}_i(\zeta, h_i) = \eta_i chp_i + \varepsilon_i shp_i. \quad (8)$$

Здесь и далее  $p_i = \tau_i p h_i$ .

Таким образом, нам для решения задачи достаточно знать вспомогательные функции только первой полосы. Остальные вспомогательные функции определяются по рекуррентным соотношениям (8). Одну из вспомогательных функций можно определить непосредственно из граничных условий. Опишем способ получения второй из этих функций. Согласно (3):

$$\bar{T}_n(\zeta, h_n) = \eta_n chp_n + \varepsilon_n shp_n = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \eta_n &= -\varepsilon_n thp_n, \\ \varepsilon_n &= -\eta_n cthp_n. \end{aligned} \quad (9)$$

Как видим, вспомогательные функции  $n$ -й полосы являются линейно зависимыми. Аналогично [5] можно показать, что это остается верным для любого слоя, т. е. для любого  $i = \overline{1, n}$  имеет место формула:

$$\eta_i = -d_i \varepsilon_i. \quad (10)$$

Функцию  $d_i(\zeta)$  будем называть функцией термодатливости  $i$ -й полосы (по аналогии с [5]). Получим рекуррентные формулы для вычисления функции  $d_i(\zeta)$ . Введем обозначения:  $shp_i = S_i$ ,  $chp_i = C_i$ . Тогда из (8)

$$\eta_{i+1} = \eta_i C_i + \varepsilon_i S_i = -d_i \varepsilon_i C_i + \varepsilon_i S_i = \varepsilon_i (-d_i C_i + S_i).$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \eta_{i+1} &= -d_{i+1} \varepsilon_{i+1} = -d_{i+1} \Delta_i (\eta_i S_i + \varepsilon_i C_i) = \\ &= -d_{i+1} \Delta_i (-d_i \varepsilon_i S_i + \varepsilon_i C_i) = -d_{i+1} \Delta_i \varepsilon_i (-d_i S_i + C_i). \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \Delta_i = \frac{K_{iz}}{K_{(i+1)z}} \frac{\tau_i}{\tau_{i+1}}.$$

Поскольку это равенство имеет место для всех  $\varepsilon_n(\zeta)$ , то, делаем вывод, что:

$$-d_i C_i + S_i = -d_{i+1} \Delta_i (-d_i S_i + C_i),$$

откуда получим рекуррентные формулы для определения функции  $d_i$

$$d_i = \frac{S_i + C_i d_{i+1} \Delta_i}{C_i + S_i d_{i+1} \Delta_i}. \quad (11)$$

Сравнивая (10) и (9), найдем, что для нижнего слоя

$$d_n = thp_n. \quad (12)$$

Методом математической индукции легко показать, что все функции являются четными по  $\zeta$ , то есть  $d_i = d_i(p)$ .

Функции податливости зависят только от толщин полос и коэффициентов теплопроводности полос. Все они могут быть вычислены, начиная с той, которая относится к нижней полосе, и заканчивая функцией  $d_1$ . Зная одну из вспомогательных функций первой полосы, и функцию податливости первой полосы, можно найти вторую вспомогательную функцию первой полосы. Зная пару вспомогательных функций первой полосы, мы можем, как отмечалось выше, найти решение исходной задачи.

В случае, когда величины  $K_i$  для всех слоев совпадают (при этом  $K_{iz}$  могут отличаться), будем иметь  $\tau_i = 1$  для любого  $i$  и полученные формулы для функций податливости совпадают с известными формулами для изотропного случая [5].

Функциями  $d_i$  удобно пользоваться, если на верхней границе задан поток. Если же на верхней границе задана температура, то удобнее ввести функции  $r_i = \frac{1}{d_i}$ . Перечислим свойства функции  $r_i$  (они легко получаются из аналогичных свойств функций  $d_i$ ):

$$\varepsilon_i = -r_i \eta_i, \quad (13)$$

$$r_i = \frac{r_{i+1} C_i + \Delta_i S_i}{r_{i+1} S_i + \Delta_i C_i}, \quad (14)$$

$$r_n = cthp_n. \quad (15)$$

**Числовой пример**

В качестве примера рассмотрим пластину, состоящую из двух полос. Получим явные формулы для  $\bar{T}_1(\zeta)$  и  $\bar{T}_2(\zeta)$ , используя соотношения, полученные ранее

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(\zeta) &= \eta_1(ch\tau_1 pz - r_1 sh\tau_1 pz) = \\ &= \bar{f}(\zeta) \left( ch\tau_1 pz - \frac{C_1 C_2 + \Delta_1 S_1 S_2}{C_2 S_1 + \Delta_1 C_1 S_2} sh\tau_1 pz \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_2(\zeta) &= \eta_2(ch\tau_2 pz - r_2 sh\tau_2 pz) = \\ &= \bar{f}(\zeta) \left( C_1 - \frac{C_1 C_2 + \Delta_1 S_1 S_2}{C_2 S_1 + \Delta_1 C_1 S_2} S_1 \right) \left( ch\tau_2 pz - \frac{C_2}{S_2} sh\tau_2 p \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть пластина, состоящая из двух полос одинаковой толщины  $h = 1$ , имеющих коэффициенты теплопроводности  $K_{1x}, K_{2x}, K_{1z}, K_{2z}$ . Обозначив  $K_{1x}$  через  $K$ , построим графики распределения температур в первом и втором слоях при следующих коэффициен-

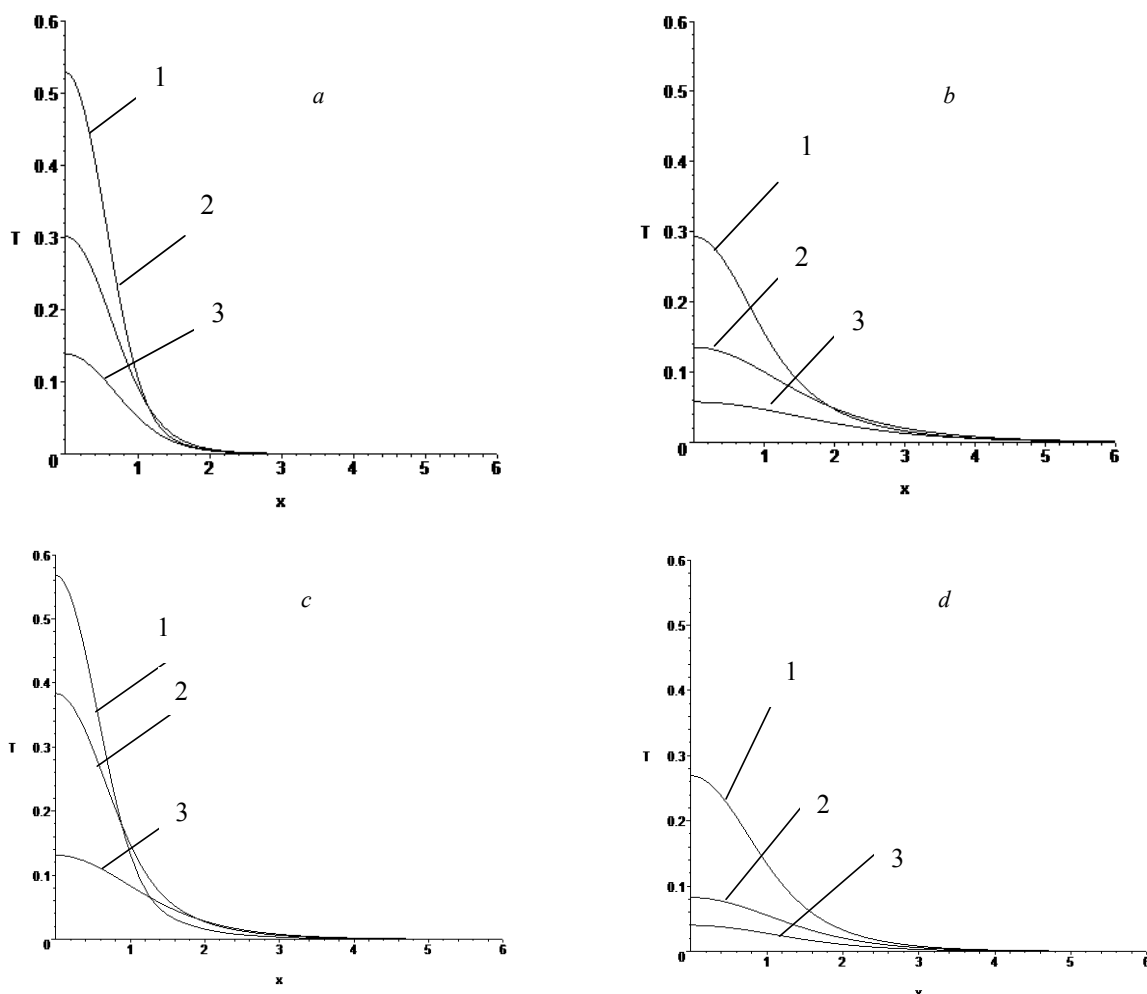
тах для анизотропных слоев:

	$K_{1x}$	$K_{1y}$	$K_{2x}$	$K_{2y}$
a	$K$	$3K$	$K$	$3K$
b	$3K$	$K$	$3K$	$K$
c	$K$	$3K$	$3K$	$K$
d	$3K$	$K$	$K$	$3K$

В том случае, когда температура на верхней границе описывается формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

получим следующие результаты:



**Рис. 2.** Распространение тепла в первом (a, b) и во втором слоях пластины (c, d) при смене ориентации осей анизотропии

Из графиков видно, что смена направления анизотропии в первом слое намного более существенно влияет на распределение температуры в теле, чем смена во втором слое. Как и следовало ожидать, изменение параметров анизотропии приводит к существенному изменению температурных полей. Этот эффект наиболее заметен вблизи общей границы слоев.

#### Общие выводы

В данной статье была рассмотрена двумерная задача о стационарном распределении тепла в анизотропном теле, состоящем из произвольного конечного числа спаянных неограниченных в плане, параллельных полос. Метод функций податливости, который применялся ранее только для изотропных сред, распространен на случай анизотропной пластины. Для вычисления температуры в каждом из слоев тела получены общие формулы в виде интегралов Фурье. Приведены примеры расчета, показывающие влияние изменения коэффициентов анизотропии на распределение температуры в двухслойной пластине. Планируется обобщить полученный результат на трехмерный случай.

#### Список литературы

1. Партон В. З. Методы математической теории упругости / В. Партон, П. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.

2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / Анатолий Дмитриевич Коваленко. – К. : Наукова думка, 1970. – 309 с.
3. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости / Витольд Новацкий. – М. : Мир, 1970. – 256 с.
4. Величко И. Г. Стационарная задача о распределении температуры в многофазной пластинке / И. Г. Величко, И. Г. Ткаченко // Вісник ЗДУ. Фізико-математичні науки. Біологічні науки – 2004. – № 1. – С. 16–20.
5. Новые направления получения аналитических решений краевых задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций [Электронный ресурс] / [В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, А. Б. Ремезенцев и др.]. – Режим доступа: <http://relay.itmo.by/jepeter/MIF4/volume3/230.PDF>
6. Вигдеревич И. Э. Об использовании метода функций податливости при решении граничных задач для многослойных оснований сложной структуры / И. Э. Вигдеревич, В. Д. Ламзюк, А. К. Приварников // Докл. АН УССР. – 1979. – С. 434–438.
7. Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / Владимир Васильевич Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 223 с.
8. Исаченко В.П. Теплопередача / В. Исаченко, В. Осипова, А. Сукомел. – М. : Энергия, 1975. – 488 с.
9. Снеддон И. Преобразование Фурье / И. Снеддон. – М. : Издательство иностранной литературы, 1955. – 668 с.

Одержано 26.02.2013

#### Олененко М.Г., Величко І.Г. Аналітичний розв'язок задачі про стаціонарний розподіл тепла в анізотропній багатошаровій пластині

*Розв'язується двовимірна задача про стаціонарний розподіл тепла в анізотропній пластині, що складається з довільного числа спаяних паралельних смуг. На одній границі задано температуру або потік, на іншій підтримується нульова температура. Розв'язок отримано у вигляді інтегралів Фур'є. Наведено приклад розрахунку для двошарової пластини.*

**Ключові слова:** багатошарова анізотропна пластинка, температура, тепловий потік, перетворення Фур'є, функція податливості.

#### Olenenko M., Velichko I. Analytical solution of a problem of the stationary distribution of heat in anisotropic multilayer plates

*A problem of the stationary distribution of heat in anisotropic multilayer plates, which consists of random number of welded parallel stripes, is solved in the article. There is a given temperature or a flow on the one border and a zero temperature on the other. The solution has been got in the form of Foureu's integral. An example of calculation for the double-layer plate is given.*

**Key words:** multilayer anisotropic plate, temperature, thermal flow, Foureu's transformation, compliance function.