

УДК 539.374.001.8

Д-р техн. наук В. В. Чигиринский¹, А. А. Ленюк¹, Л. А. Якубович²

¹ Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье

² Национальный горный университет, г. Днепропетровск

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ПАРАМЕТРЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ОБЪЕМНОМ ПЛАСТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Определены и исследованы граничные условия при решении пространственной задачи теории пластичности в замкнутом виде. Представлены компоненты тензоров напряжений и скоростей деформации. Решения выражаются сочетанием плоских функций. Схема течения металла в очаге деформации определяет характер распределения контактных нормальных и касательных напряжений. Контактное трение определяет величину и неравномерность распределения компонентов тензора напряжений в объеме очага деформации. Показаны качественные и количественные характеристики изменения напряженного состояния металла для однокупольной пространственной схемы нагружения. Представленный результат имеет место для нешироких очагов деформации, с одной линией разделения течения металла. Полученное решение можно использовать в случае объемного нагружения очага деформации.

Ключевые слова: граничные условия, контактное напряжение, объемное нагружение, пространственная задача, плоские функции, фактор формы, коэффициент трения.

Введение

Пространственное формоизменение характеризуется отличительной кинематикой течения металла, силовой схемой в сравнении с плоским деформированием. При этом задача усложняется как в постановочной части, так и в решении [1–4]. Анализ показывает, что рассмотрение только части системы уравнений теории пластичности является недостаточным для обеспечения надежности и достоверности результата. Решение задачи теории пластичности в напряжениях должны «подкрепляться» решениями в деформациях, т. е. задача должна быть замкнутой [5–7].

Постановка задачи

В работе [4] рассматривается система уравнений теории пластичности: уравнения равновесия, обобщенные уравнения равновесия, уравнения связи, уравнения совместности скоростей деформаций и граничные условия в напряжениях и скоростях деформации.

На рис. 1 представлена модель пластического течения в очаге деформации в плане и компоненты тензора напряжений, подлежащие определению [5–7].

В работах [1–4] предложены решения замкнутой пространственной задачи теории пластичности. Компоненты тензоров напряжений и скоростей деформации представлены в виде

$$\sigma'_x = \pm C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1' \cdot \cos A_1 \Phi_1 \mp C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta_3' \cdot \cos A_3 \Phi_3 + \sigma_0 + C,$$

$$\sigma'_y = \mp C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1' \cdot \cos A_1 \Phi_1 \pm C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2' \cdot \cos A_2 \Phi_2 + \sigma_0 + C,$$

$$\sigma'_z = \pm C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta_3' \cdot \cos A_3 \Phi_3 \mp C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2' \cdot \cos A_2 \Phi_2 + \sigma_0 + C,$$

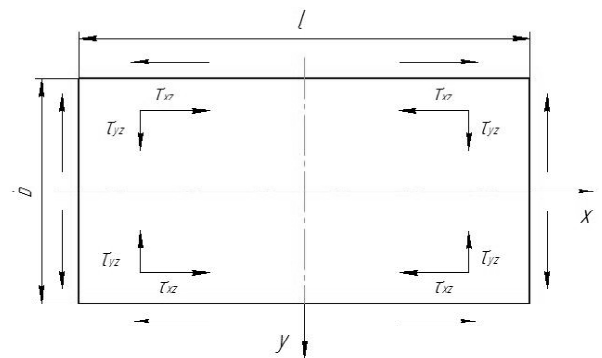
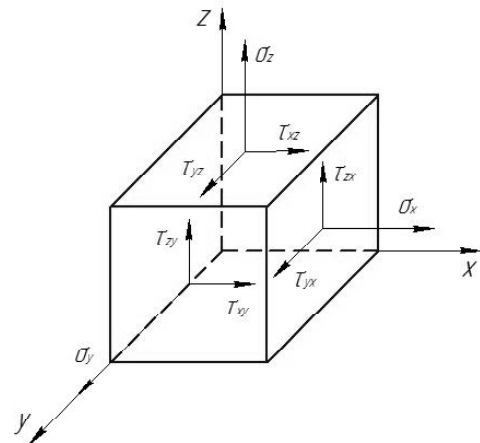


Рис. 1. Компоненты тензоров напряжений и схема действия касательных напряжений на контакте при осадке прямоугольной заготовки

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1' \cdot \sin A_1 \Phi_1, \tau_{yz} = C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta_3' \cdot \sin A_3 \Phi_3, \\ \tau_{zx} &= C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2' \cdot \sin A_2 \Phi_2 \end{aligned} \quad (1)$$

при условии

$$\begin{aligned} \theta_{1x}' &= \mp A_1 \Phi_{1y}', & \theta_{1y}' &= \pm A_1 \Phi_{1x}'; & \theta_{3y}' &= \mp A_3 \Phi_{3z}', \\ \theta_{3z}' &= \pm A_3 \Phi_{3y}'; \\ \theta_{2z}' &= \mp A_2 \Phi_{2x}', & \theta_{2x}' &= \pm A_2 \Phi_{2z}'; & \theta_{1xx}' + \theta_{1yy}' &= 0, \\ A_1 \Phi_{1xx}' + A_1 \Phi_{1yy}' &= 0; & \theta_{3yy}' + \theta_{3zz}' &= 0, & A_3 \Phi_{3yy}' + A_3 \Phi_{3zz}' &= 0; \\ \theta_{2zz}' + \theta_{2xx}' &= 0, & A_2 \Phi_{2zz}' + A_2 \Phi_{2xx}' &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \xi_x &= \pm C_{\xi 1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \cos B_1 \Phi_1 \mp C_{\xi 3} \cdot \exp \theta_3'' \cdot \cos B_3 \Phi_3, \\ \xi_y &= \pm C_{\xi 2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \cos B_2 \Phi_2 \mp C_{\xi 1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \cos B_1 \Phi_1, \\ \xi_z &= \pm C_{\xi 3} \cdot \exp \theta_3'' \cdot \cos B_3 \Phi_3 \mp C_{\xi 2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \cos B_2 \Phi_2, \\ \dot{\gamma}_{xy} &= 2 \cdot C_{\xi 1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \sin B_1 \Phi_1, \dot{\gamma}_{yz} = 2 \cdot C_{\xi 3} \cdot \exp \theta_3'' \cdot \sin B_3 \Phi_3, \\ \dot{\gamma}_{zx} &= 2 \cdot C_{\xi 2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \sin B_2 \Phi_2 \end{aligned} \quad (3)$$

при условии

$$\begin{aligned} \theta_{1x}'' &= \mp B_1 \Phi_{1y}'', & \theta_{1y}'' &= \pm B_1 \Phi_{1x}''; & \theta_{3y}'' &= \mp B_3 \Phi_{3z}'', & \theta_{3z}'' &= \pm B_3 \Phi_{3y}''; \\ \theta_{2z}'' &= \mp B_2 \Phi_{2x}'', & \theta_{2x}'' &= \pm B_2 \Phi_{2z}''; & \theta_{1xx}'' + \theta_{1yy}'' &= 0, \\ B_1 \Phi_{1xx}'' + B_1 \Phi_{1yy}'' &= 0; & \theta_{3yy}'' + \theta_{3zz}'' &= 0, & B_3 \Phi_{3yy}'' + B_3 \Phi_{3zz}'' &= 0; \\ \theta_{2zz}'' + \theta_{2xx}'' &= 0, & B_2 \Phi_{2zz}'' + B_2 \Phi_{2xx}'' &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

где σ_i – нормальное напряжение; τ_{ij} – касательное напряжение; ξ_i – линейная скорость деформации; $\dot{\gamma}_{ij}$ – сдвиговая скорость деформации; σ_0 – среднее нормальное напряжение; A_i и B_i – постоянные величины, характеризующие тригонометрическую функцию для напряженного и деформационного состояния пластичной среды; Φ_i – неизвестная гармоническая функция, зависящая от координат очага; θ_{ij}' и θ_{ij}'' – неизвестные гармонические функции, показатели экспонент, характеризующие распределение напряжений и скоростей деформации в очаге деформации; $C_{\sigma i}$ и $C_{\xi i}$ – постоянные величины, характеризующие напряженное состояние пластической среды и поле деформаций.

Полученные условия существования решения (2), (4) позволяют определить неизвестные θ_{ij}' , $A_i \Phi_{ij}$.

В выражениях (1), (3) показаны функции, которые ограничены решениями задачи (2), (4). Это соотношения Коши-Римана и уравнения Лапласа. Для нормальных напряжений решения представляют собой сочетания плоских функций.

Ориентировочное распределение контактных напряжений при осадке показано на рис. 2.

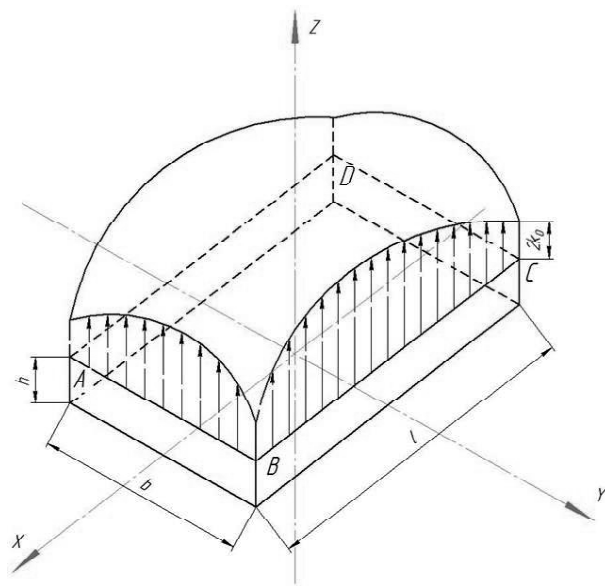


Рис. 2. Эпюра предположенного распределения контактных напряжений

Из рис. 2 следует определенная привязка к граничным условиям, когда в углах очага деформации сопротивление деформации принимается равным $2k_0$. В дальнейшем, переходя к безразмерным значениям, его можно исключить из рассмотрения.

В выражениях (1)...(4) фигурируют постоянные интегрирования и константы, которые определяются граничными условиями, рис. 2.

В условиях реального очага деформации нормальные напряжения (1) имеют знак «минус». Среднее нормальное напряжение [6]

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= -2 \cdot C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1 \cdot \cos A_1 \Phi_1 - 2 \cdot C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2 \times \\ &\times \cos A_2 \Phi_2 - 2 \cdot C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta_3 \cdot \cos A_3 \Phi_3. \end{aligned}$$

Из нескольких вариантов, которые допускают решение, запишем следующие выражения

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -3C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1 \cdot \cos A_1 \Phi_1 - C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2 \times \\ &\times \cos A_2 \Phi_2 - 2C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta_3 \cdot \cos A_3 \Phi_3 + C, \\ \sigma_y &= -C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta_3 \cdot \cos A_3 \Phi_3 - C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1 \times \\ &\times \cos A_1 \Phi_1 - 2C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2 \cdot \cos A_2 \Phi_2 + C, \\ \sigma_z &= -3C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2 \cdot \cos A_2 \Phi_2 - 3C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta_3 \times \\ &\times \cos A_3 \Phi_3 - 2C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1 \cdot \cos A_1 \Phi_1 + C, \\ \tau_{xy} &= C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1 \cdot \sin A_1 \Phi_1, \tau_{yz} = C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta_3 \cdot \sin A_3 \Phi_3, \\ \tau_{zx} &= C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2 \cdot \sin A_2 \Phi_2. \end{aligned} \quad (5)$$

В выражениях (5) присутствуют коэффициенты $C_{\sigma 1}$, $C_{\sigma 2}$, $C_{\sigma 3}$ и C .

Рассмотрим значения функций в точке B и запишем граничные условия, рис. 2 – при $x = l/2$, $y = b/2$,

$z = h/2$, $\theta_1 = \theta_{10}$, $\theta_2 = \theta_{20}$, $\theta_3 = \theta_{30}$, $A_1\Phi_1 = A_1\Phi_{10}$,
 $A_2\Phi_2 = A_2\Phi_{20}$, $A_3\Phi_3 = A_3\Phi_{30}$, $\sigma_x - \sigma_z = \sigma_y - \sigma_z$,
 $\sigma_z = 2k_0$.

После составления разностей напряжений и подстановки граничных условий получим

$$2C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_{10} \cdot \cos A_1 \Phi_{10} = C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_{20} \times \\ \times \cos A_2 \Phi_{20} - C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta_{30} \cdot \cos A_3 \Phi_{30}$$

и далее

$$C_{\sigma 1} = \frac{C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_{20} \cdot \cos A_2 \Phi_{20} - C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta_{30} \cdot \cos A_3 \Phi_{30}}{2 \exp \theta_{10} \cdot \cos A_1 \Phi_{10}} \quad (6)$$

Если разность в числителе равна нулю, то $C_{\sigma 1} = 0$.
 При этом

$$C_{\sigma 2} = C_{\sigma 3} \cdot \frac{\exp \theta_{30} \cdot \cos A_3 \Phi_{30}}{\exp \theta_{20} \cdot \cos A_2 \Phi_{20}} \quad (7)$$

После несложных преобразований (6), (7) для предложенных граничных условий неизвестные постоянные запишутся в виде

$$C_{\sigma 1} = -\frac{k_0}{2 \exp \theta_{10} \cdot \cos A_1 \Phi_{10}}, \\ C_{\sigma 2} = \frac{0,5k_0}{3 \exp \theta_{20} \cdot \cos A_2 \Phi_{20}}, \\ C_{\sigma 3} = \frac{3,5k_0}{3 \exp \theta_{30} \cdot \cos A_3 \Phi_{30}}, \quad C = k_0 \quad (8)$$

где k_0 – сопротивление пластическому сдвигу в угловой части очага деформации на контакте.

Подставляя (8) в (5), запишем полученные компоненты тензора напряжений запишем полученные компоненты тензора напряжений

$$\sigma_x = \frac{3}{2} k_0 \exp(\theta_1 - \theta_{10}) \frac{\cos A_1 \Phi_1}{\cos A_1 \Phi_{10}} - \\ - \frac{1}{6} k_0 \exp(\theta_2 - \theta_{20}) \frac{\cos A_2 \Phi_2}{\cos A_2 \Phi_{20}} - \\ - \frac{7}{3} k_0 \exp(\theta_3 - \theta_{30}) \frac{\cos A_3 \Phi_3}{\cos A_3 \Phi_{30}} + k_0, \\ \sigma_y = -\frac{7}{6} k_0 \exp(\theta_3 - \theta_{30}) \frac{\cos A_3 \Phi_3}{\cos A_3 \Phi_{30}} + \\ + \frac{1}{2} k_0 \exp(\theta_1 - \theta_{10}) \frac{\cos A_1 \Phi_1}{\cos A_1 \Phi_{10}} - \\ - \frac{1}{3} k_0 \exp(\theta_2 - \theta_{20}) \frac{\cos A_2 \Phi_2}{\cos A_2 \Phi_{20}} + k_0, \\ \sigma_z = -\frac{1}{2} k_0 \exp(\theta_2 - \theta_{20}) \frac{\cos A_2 \Phi_2}{\cos A_2 \Phi_{20}} - \\ - \frac{7}{2} k_0 \exp(\theta_3 - \theta_{30}) \frac{\cos A_3 \Phi_3}{\cos A_3 \Phi_{30}} + \\ + k_0 \exp(\theta_1 - \theta_{10}) \frac{\cos A_1 \Phi_1}{\cos A_1 \Phi_{10}} + k_0 \quad (9)$$

$$\tau_{xy} = -k_0 \exp(\theta_1 - \theta_{10}) \frac{\sin A_1 \Phi_1}{\cos A_1 \Phi_{10}},$$

$$\tau_{yz} = -\frac{7}{2} k_0 \exp(\theta_3 - \theta_{30}) \frac{\sin A_3 \Phi_3}{\cos A_3 \Phi_{30}},$$

$$\tau_{zx} = \frac{1}{2} k_0 \exp(\theta_2 - \theta_{20}) \frac{\sin A_2 \Phi_2}{\cos A_2 \Phi_{20}}.$$

Следует подчеркнуть, что в точках *A* и *B* напряжения $\sigma_x = \sigma_y = 0$, что соответствует принятым граничным условиям.

Из уравнений Лапласа и соотношений Коши-Римана определяем функции $A_i \Phi_i$ и θ_i , ($i = 1, 2, 3$).
 С учетом граничных условий разности и функции $A_i \Phi_i$ в (9) будут равны

$$\theta_1 - \theta_{10} = \frac{1}{2} A_1 A_3 \left[\left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right) \right],$$

$$A_1 \Phi_1 = A_1 A_3 \cdot x \cdot y,$$

$$\theta_2 - \theta_{20} = \frac{1}{2} A_2 A_6 \left[\left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right) - \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right],$$

$$A_2 \Phi_2 = A_2 A_6 \cdot x \cdot z,$$

$$\theta_3 - \theta_{30} = \frac{1}{2} A_3 A_9 \left[\left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right],$$

$$A_3 \Phi_3 = A_3 A_9 \cdot y \cdot z.$$

В угловых точках указанные разности равны нулю.

Значения $A_1 A_3$, $A_2 A_6$ и $A_3 A_9$ с учетом удельных сил трения в точках *A...D*, равны

$$A_1 A_3 = 4 \cdot \frac{f(1-f)}{l \cdot b}, \quad A_2 A_6 = 4 \cdot \frac{f(1-f)}{l \cdot h},$$

$$A_3 A_9 = 4 \cdot \frac{f(1-f)}{b \cdot h}.$$

Напряжения (9) могут быть просчитаны для каждой точки объемного очага деформации, включая контакт с инструментом.

На рис. 3–5 представлена эпюра нормальных напряжений очага деформации по разным направлениям: вдоль оси *X* – рис. 3–4 и вдоль оси *Y* – рис. 5, при $h = 10$ в зависимости от:

a – коэффициента трения $f = 0,1 \dots 0,5$, $l/h = 8$, $b/h = 8$;

b – фактора формы $l/h = 1; 3; 5; 8; 10$, $f = 0,3$, $b/h = 8$;

c – фактора формы $b/h = 1; 3; 5; 8; 10$, $f = 0,3$, $l/h = 8$.

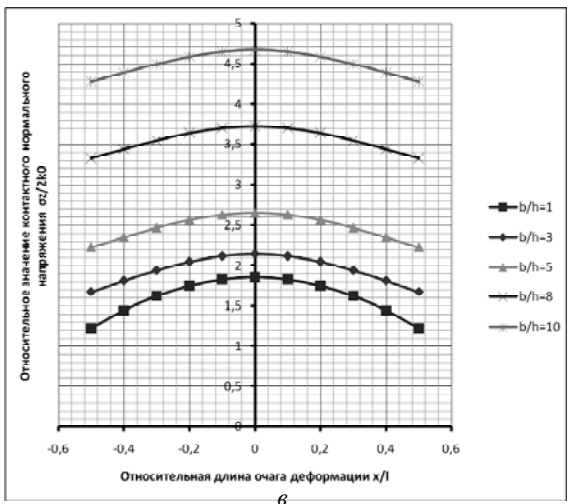
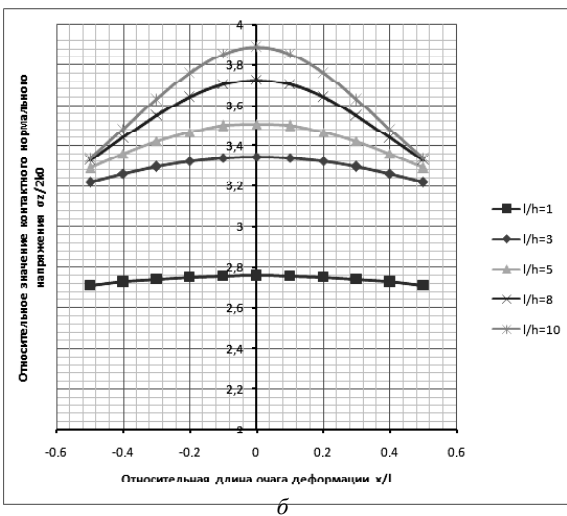
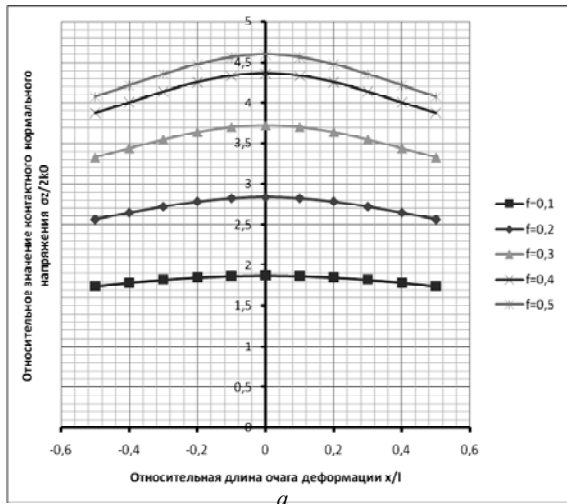


Рис. 3. Распределение нормальных напряжений на контактной поверхности вдоль оси X , при $y = 0$ при осадке прямоугольной заготовки

Из рис. 3–5 следует, что нормальные контактные напряжения представляют собой объемную, многоповерхностную, однокупольную эпюру с неравномерным распределением нагрузки вдоль осей X и Y .

С изменением коэффициента трения f и факторов формы l/h и b/h на контакте, изменяется напряженное состояние в очаге по направлениям X и Y , а величина и характер распределения.

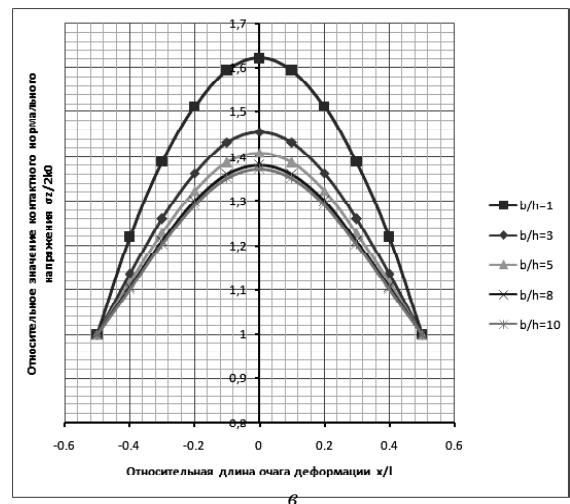
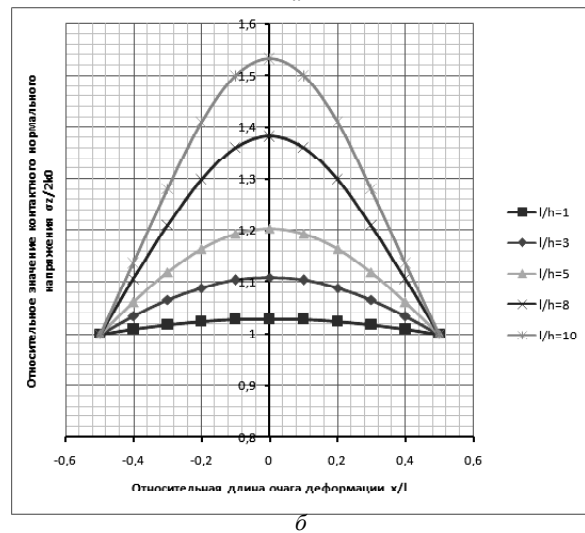
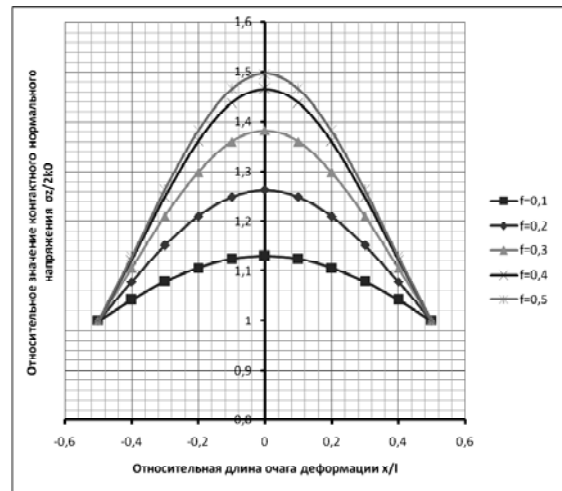
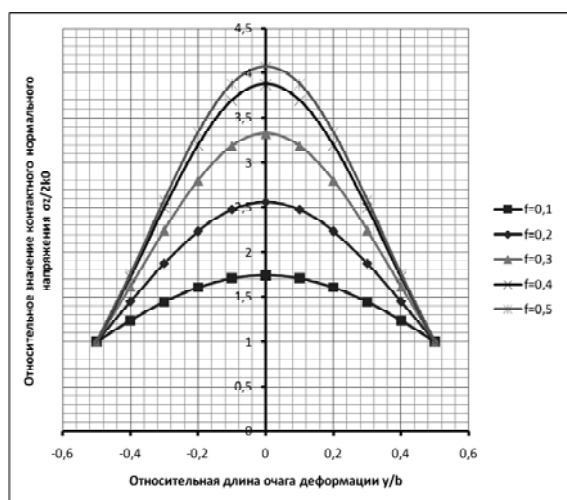
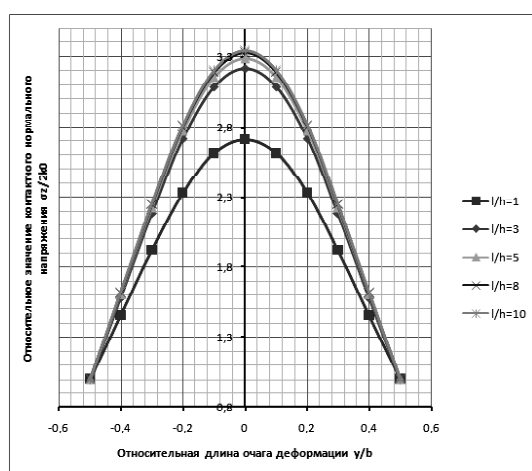


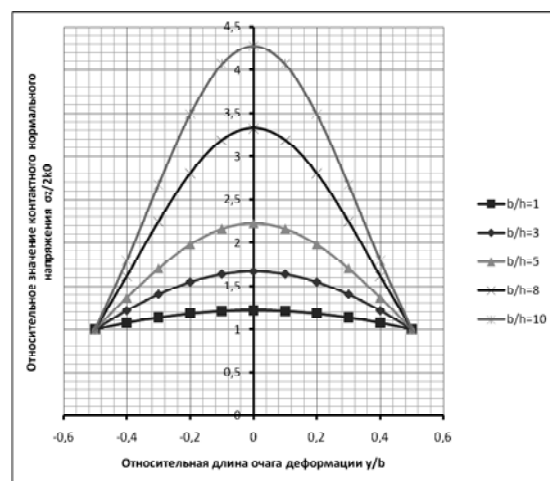
Рис. 4. Распределение нормальных напряжений на контактной поверхности вдоль оси X , при $y = b/2$ при осадке прямоугольной заготовки



а



б



в

Рис. 5. Распределение нормальных напряжений на контактной поверхности вдоль оси Y , при $x=l/2$ при осадке прямоугольной заготовки

Однокупольная эпюра распределения напряжений по контактной поверхности соответствует схеме течения металла, представленной на рис. 1. Металл растекается относительно линий, совпадающих с осями сим-

метрии X и Y очага деформации. Максимальные значения нормальных напряжений, по направлениям, совпадают также с осями симметрии, в которых контактные касательные напряжения изменяют свой знак. Если кинематика течения металла характеризуется другой схемой, то эпюра контактных напряжений может быть двухкупольной и т. д.

Анализ показывает, что с изменением контактного трения (коэффициента трения) и параметров очага деформации (l/h и b/h) изменяются контактные напряжения в сторону увеличения или уменьшения их неравномерности, см. рис. 3–5. Если коэффициент трения равен нулю, то из выражений (9) следует, что удельные силы трения отсутствуют, а распределение нормальных напряжений на контакте носит равномерный характер.

Выводы

1. Схема течения металла в очаге деформации определяет характер распределения контактных нормальных и касательных напряжений.
2. Контактное трение определяет величину и неравномерность распределения компонентов тензора напряжений в объеме очага деформации.
3. Показаны качественные и количественные характеристики изменения напряженного состояния металла для однокупольной пространственной схемы нагружения.

Список литературы

1. Чигиринский В. В. Моделирование участков перехода при пластическом формоизменении в условиях объемного нагружения / В. В. Чигиринский, А. А. Ленюк // Вісник ЗНУ : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. Запоріжжя : ЗНУ, 2015. – №3 – С. 275–284.
2. Чигиринский В. В. Определение напряженно-деформированного состояния в зонах перехода объемного течения / В. В. Чигиринский, А. А. Ленюк // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии: научнo-технический журнал. Орел : Госуниверситет УНПК, 2015. – №5 (313) – С. 87–94.
3. Чигиринский В. В. Определение интегральных характеристик напряженного состояния точки при пластической деформации в условиях объемного нагружения / В. В. Чигиринский, А. А. Ленюк, С. М. Ечин // Обработка материалов давлением: сборник научных трудов. Краматорск: ДГМА, 2015. – № 2 (41). – С. 41–50.
4. Chigirinsky V. V. Determination of integral characteristics of stress state of the point during plastic deformation in conditions of volume loading / V. V. Chigirinsky, A. A. Lenok, S.M. Echin // Metallurgical and Mining Industry : scientific and technical journal. 2015. – №. 11 – P. 153–164.
5. Чигиринский В. В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций // Известия вузов. Черная металлургия. – 2009. – № 5. – С. 11–16.
6. Чигиринский В. В. Замкнутая пространственная задача теории пластичности / В. В. Чигиринский, С. П. Шейко // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні: науковий журнал, 2013. – № 2. – С. 120–125.

Чигиринський В.В., Ленюк А.А., Якубович Л.А. Дослідження впливу граничних умов на параметри напруженого стану при об'ємному навантаженні

Визначені та досліджені граничні умови при вирішенні просторової задачі теорії пластичності в замкнутому вигляді. Представлені компоненти тензорів напружень і швидкостей деформації. Рішення виражаються поєднанням плоских функцій. Схема течії металу в осередку деформації визначає характер розподілу контактних нормальних і дотичних напружень. Контактне тертя визначає величину і нерівномірність розподілу компонентів тензора напружень в об'ємі осередку деформації. Показані якісні та кількісні характеристики зміни напруженого стану металу для однокупольної просторової схеми навантаження. Представлений результат має місце для нешироких осередків деформації, з однією лінією розподілу течії металу. Отримане рішення можна використовувати в разі об'ємного навантаження осередку деформації.

Ключові слова: граничні умови, контактне напруження, об'ємне навантаження, просторова задача, плоскі функції, фактор форми, коефіцієнт тертя.

Chigirinskyi V., Lenok A., Yakubovich L. Research of influence of boundary conditions on the parameters of the stress state at a volume loading

Boundary conditions at the solution of a spatial task of the theory of plasticity in the closed look are defined and investigated. Components of tensors of stress and rates of deformation are presented. Decisions are expressed by a combination of flat functions. Scheme of the metal flow in the deformation determines the character of the distribution of contact normal and tangential stresses. The contact friction determines the size and uneven distribution of the stress tensor components in the volume of the deformation zone. The qualitative and quantitative characteristics of the changes in the stress state of the metal-dome space for loading scheme are shown. The presented result takes place for not the wide zones of deformation, with one line of division of the metal flow. The resulting solution can be used in case of volume loading of deformation zone.

Key words: boundary conditions, contact stress, volume loading, spatial task, flat functions, form factor, friction coefficient.