

РАСЧЕТ ДВУМЕРНЫХ ТЕПЛОВЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛИТАХ

Предложен метод расчета тепловых стационарных, периодических по пространственной координате, полей в многослойных плитах. На верхней границе плиты температура описывается четной периодической функцией. На нижней границе плиты температура нулевая. На общих границах слоев выполняется условие непрерывности температурного поля и равенство тепловых потоков. Решение обобщено для случая известных температур на верхней и нижней границах плиты, заданных периодическими функциями с одинаковыми периодами. Приведены примеры результатов числовых исследований для разных граничных условий. Проведен сравнительный анализ и сделаны выводы.

Ключевые слова: многослойные плиты, гармоническое уравнение, рекуррентные соотношения, последовательности податливости, закон Фурье.

Введение

Составными элементами многих инженерных сооружений являются многослойные плиты, пластины, основания, оболочки. Это связано с тем, что за счет слоистости материалов можно добиться уменьшения веса, улучшение звукоизоляционных, теплоизоляционных свойств при уменьшении их стоимости. При разработке соответствующих сооружений необходимо уметь рассчитывать результаты действий различных физических полей на многослойные конструкции. Особый интерес представляют разработка аналитических методов, поскольку в этом случае можно гарантировать требуемую точность вычислений и исследовать влияние физических и механических характеристик конструкций на их поведение. Однако такие решения можно получить лишь в исключительных случаях. Одним из важных видов физических полей является тепловое поле. Таким образом, задача аналитического описания теплового поля в многослойной плите с плоскопараллельными слоями актуальна. Более подробному анализу построения и применения модели, описывающей теплопроводность многослойных конструкций, посвящена работа [1].

Решению задач термоупругости посвящены такие фундаментальные исследования как, например, [2–4]. Известны различные способы получения точных и приближенных аналитических решений. Так метод однородных решений используется в работах [5, 6]. Метод Грина, с использованием аппарата обобщенных функций, используется в работе [7]. Метод жесткостных функций в применении к подобным задачам применялся в [8]. Приближенные методы анализа термоупругих многослойных пленок обсуждаются в [9].

В данной работе используется идея метода матриц податливости, введенная в работе [10]. Метод матриц

податливости есть модификация метода функций податливости, который для задач теплоупругости рассмотрены в работах [11–13]. Предложен подход, где неизвестные функции раскладываются в ряды Фурье, а для нахождения неизвестных коэффициентов используются рекуррентные соотношения и метод функций податливости, который используется в задачах теории упругости как уже зарекомендовавший себя метод нахождения достоверных результатов.

Физическая постановка

Имеется многослойная плита, на верхней и нижней границе которой известна температура, причем тепловое поле в плите стационарно. Количество слоев равно m . Будем рассматривать двумерную задачу, то есть полагать, что вдоль одного из направлений температурное поле не изменяется. На границе верхнего слоя температура описывается четной периодической функцией, а на нижней границе нижнего слоя температура считается нулевой. На общей границе двух соседних слоев выполняется условие непрерывности температурного поля и равенство тепловых потоков (закон Фурье). Каждый слой характеризуется толщиной h_i и коэффициентом теплопроводности α_i . Ставится задача про определение функций, которыми характеризуются изменения температурного поля в каждом слое.

Математическая постановка

В каждом слое вводим локальную декартову систему координат с началом на верхней границе соответствующего слоя так, чтобы все оси OZ_i лежали на одной прямой и были направлены вглубь слоя (рис. 1). Перейдем к безразмерным величинам таким образом, чтобы период функции, описывающий температуру на верхней границе, был равен 2π . Задача сводится к ре-

шению гармонического уравнения для каждой из функций $T_i(x, z)$, описывающей температуру в i -том слое:

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

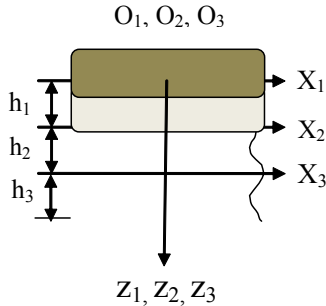


Рис. 1. Локальная система координат для $m = 3$ слоев

Граничные условия задаются для верхней границы верхнего слоя и для нижней границы нижнего слоя

$$T_1(x, 0) = f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \cos(nx), \quad (2)$$

$$T_m(x, h_m) = 0. \quad (3)$$

Условия сопряжения слоев задаются следующими соотношениями

$$T_i(x, h) = T_{i+1}(x, 0), \quad (4)$$

$$\alpha_i \cdot \frac{\partial T_i}{\partial z}(x, h_i) = \alpha_{i+1} \cdot \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z}(x, 0). \quad (5)$$

В формулах (4), (5) i изменяется от 1 до $m - 1$.

Метод решения

Однослойная плита. Рассмотрим один из слоев. В этом подразделе для удобства индекс i – номер слоя, будем опускать, поэтому (1) запишется следующим образом

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

В предположении, что $T(x, z)$ является четной периодической функцией с периодом 2π , с использованием разложения в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$, общее решение примет вид

$$T(x, z) = \frac{c_1 z + c_2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot e^{nz} + B_n \cdot e^{-nz}) \cdot \cos(nx). \quad (7)$$

Для определения произвольных постоянных, входящих в (7), необходимо использовать граничные условия.

Введем понятия вспомогательных последовательностей для слоя

$$\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty},$$

которые связаны с температурой и потоком на поверхности слоя следующим образом:

$$T(x, 0) = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \cdot \cos(nx), \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(x, 0) = \frac{\varepsilon_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \varepsilon_n \cdot \cos(nx). \quad (9)$$

Искомая функция выражается через элементы введенных вспомогательных последовательностей

$$T(x, z) = \frac{\varepsilon_0 z + \eta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\eta_n \cdot ch(nz) + \varepsilon_n \cdot sh(nz)) \cdot \cos(nx). \quad (10)$$

Таким образом, для определения температуры в слое достаточно найти две его вспомогательные последовательности.

Многослойная плита. Для многослойной плиты, состоящей из m слоев достаточно определить $2m$ вспомогательных последовательностей. Покажем, что на самом деле достаточно знать только вспомогательные последовательности первого слоя.

Температура в i -том слое определяется формулой

$$T_i(x, z) = \frac{\varepsilon_{i0} z + \eta_{i0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\eta_{in} \cdot ch(nz) + \varepsilon_{in} \cdot sh(nz)) \cdot \cos(nx). \quad (11)$$

Используя (11), температура на нижней границе i -го слоя запишется в виде

$$T_i(x, h_i) = \frac{\varepsilon_{i0} h_i + \eta_{i0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\eta_{in} \cdot c_{in} + \varepsilon_{in} \cdot s_{in}) \cdot \cos(nx). \quad (12)$$

тут введены обозначения

$$ch(nh_i) = c_{in}, \quad sh(nh_i) = s_{in}.$$

По определению вспомогательных последовательностей в $(i+1)$ -том слое имеем

$$T_{(i+1)}(x, 0) = \frac{\eta_{(i+1)0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{(i+1)n} \cdot \cos(nx). \quad (13)$$

Подставив (12) и (13) в условие сопряжения слоев (4), получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{cases} \eta_{(i+1)0} = \varepsilon_{i0} \cdot h_i + \eta_{i0}, \\ \eta_{(i+1)n} = \eta_{in} \cdot c_{in} + \varepsilon_{in} \cdot s_{in}. \end{cases} \quad (14)$$

В развернутом виде условия сопряжения (5) запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} \alpha_i \cdot \left(\frac{\varepsilon_{i0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot \eta_{in} \cdot s_{in} + n \cdot \varepsilon_{in} \cdot c_{in}) \cos(nx) \right) = \\ = \alpha_{i+1} \left(\frac{\varepsilon_{(i+1)0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \varepsilon_{(i+1)n} \cdot \cos(nx) \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем еще два рекуррентных соотношения

$$\begin{cases} \varepsilon_{(i+1)0} = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \cdot \varepsilon_{i0}, \\ \varepsilon_{(i+1)n} = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \cdot (\eta_{in} \cdot s_{in} + \varepsilon_{in} \cdot c_{in}). \end{cases} \quad (15)$$

Таким образом, зная вспомогательные последовательности первого слоя по формулам (14), (15) можно найти вспомогательные последовательности второго, третьего и т. д. слоев.

Из граничных условий (2) можно найти элементы вспомогательной последовательности η_{10} , η_{1n} по формулам

$$\begin{aligned} \eta_{10} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot dx, \\ \eta_{1n} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(xn) dx. \end{aligned} \quad (16)$$

В следующем пункте мы укажем способ нахождения последовательностей ε_{10} , ε_{1n} с использованием того факта, что температура на нижней границе нулевая.

Аналоги матриц податливости. Для каждого слоя введем последовательности $\{d\}_{n=0}^{\infty}$, связанные с вспомогательными последовательностями i -го слоя соотношениями

$$\eta_{in} = \varepsilon_{in} \cdot d_{in}. \quad (17)$$

Вычислим величину $\eta_{(i+1)n}$ двумя способами с использованием (14), (15) и (17).

$$\begin{aligned} \eta_{(i+1)n} &= \varepsilon_{(i+1)n} \cdot d_{(i+1)n} = \\ &= \Delta_i \cdot \varepsilon_{in} \cdot (s_{in} \cdot d_{in} + c_{in}) \cdot d_{(i+1)n}, \\ \eta_{(i+1)n} &= \eta_{in} \cdot c_{in} + \varepsilon_{in} \cdot s_{in} = \\ &= \varepsilon_{in} \cdot (d_{in} \cdot c_{in} + s_{in}). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь вводится обозначение $\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} = \Delta_i$.

Приравняв (18) и (19), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \Delta_i \cdot \varepsilon_{(in)} \cdot (s_{in} \cdot d_{in} + c_{in}) \cdot d_{(i+1)n} = \\ = \varepsilon_{in} \cdot (d_{in} \cdot c_{in} + s_{in}) \end{aligned}$$

из которого определяются элементы последовательности податливости, начиная для элементов нижнего слоя

$$d_{in} = -\frac{s_{in} - \Delta_i \cdot c_{in} \cdot d_{(i+1)n}}{c_{in} - \Delta_i \cdot s_{in} \cdot d_{(i+1)n}}. \quad (20)$$

Аналогично находим рекуррентные соотношения для первых слагаемых разложения с нулевыми индексами для (11)

$$d_{i0} = \Delta_i \cdot d_{(i+1)0} - h_i. \quad (21)$$

Из граничных условий (3) и формулы (11) следует равенство

$$\begin{aligned} T_m(x, h_m) &= \frac{\varepsilon_{m0} h_m + \eta_{m0}}{2} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (\eta_{mn} \cdot c_{mn} + \varepsilon_{mn} \cdot s_{mn}) \cdot \cos(nx) = 0, \end{aligned}$$

из которого получаем

$$\eta_{m0} = -\varepsilon_{m0} h_m, \quad \eta_{mn} = -\frac{\varepsilon_{mn} \cdot s_{mn}}{c_{mn}}. \quad (22)$$

Используя (17), (22), находим элементы последовательности податливости нижнего слоя

$$d_{m0} = -h_m, \quad d_{mn} = -th(nh_m), \quad (23)$$

с которых начинаются вычисления элементов последовательностей податливости.

Таким образом, используя (20), (21), (23) находятся все последовательности $\{d_{in}\}_{n=0}^{\infty}$ вплоть до d_{1n} , а следовательно ε_{1n} . В результате приведенных аналитических выкладок можно описать выражения для теплового поля $T_i(x, z)$ для каждого слоя по формуле (12).

Алгоритм решения

1. Определяем значения элементов последовательности податливости на нижнем m -ом слое d_{m0} и d_{mn} по формулам (23).

2. Последовательно находим элементы последовательности податливости $\{d_{in}\}_{n=0}^{\infty}$ для каждого слоя, начиная с нижних слоев, а именно, для $i = m-1$, $i = m-2, \dots, i = 1$ по формулам (21), (20).

3. Определяем η_{10}, η_{1n} по формулам (16).

4. Определяем ε_{10} и ε_{1n} по формулам (17).

5. По рекуррентным соотношениям (14), (15) получаем значения элементов вспомогательных последовательностей, связанных с температурой и потоком на поверхности слоев $\eta_{i0}, \eta_{in}, \varepsilon_{i0}$ и ε_{in} для $i = 2, i = 3, \dots, i = m$.

6. Записываем выражения для теплового поля в каждом слое по формуле (11).

Если мы хотим получить приближенное решение поставленной задачи, то задается число N и в приведенном алгоритме n меняется от 1 до N .

Температура в многослойной плите при неоднородных условиях

Пусть в граничных условиях (2) функция $f(x)$ произвольная, тогда её можно представить в виде

$$f(x) = \overline{f(x)} + \tilde{f}(x),$$

здесь $\overline{f(x)}$ – четная функция, $\tilde{f}(x)$ – нечетная функция, обе функции являются периодическими с периодом 2π . Следовательно, решение поставленной задачи можно записать в виде суперпозиции двух функций

$$T_i(x, z) = \overline{T_i(x, z)} + \tilde{T}_i(x, z), \quad (24)$$

где $\overline{T_i(x, z)}$ – ранее полученное решение для случая четной функции, а для $\tilde{T}_i(x, z)$ решение получаем аналогично с условием нечетности функции

$$\tilde{T}_i(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\eta}_{in} \cdot ch(nz) + \tilde{\varepsilon}_{in} sh(nz)) \cdot \sin(nx). \quad (25)$$

Тут используются формулы

$$\tilde{\eta}_{1n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(xn) dx, \quad \tilde{\varepsilon}_{1n} = \frac{\tilde{\eta}_{1n}}{d_{1n}},$$

где d_{in} находятся по формуле (20) при условии, что $d_{mn} = -th(nh_m)$ и рекуррентные соотношения

$$\begin{cases} \tilde{\eta}_{(i+1)n} = \tilde{\eta}_{in} \cdot c_{in} + \tilde{\varepsilon}_{in} \cdot s_{in}, \\ \tilde{\varepsilon}_{(i+1)n} = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \cdot (\tilde{\eta}_{in} \cdot s_{in} + \tilde{\varepsilon}_{in} \cdot c_{in}). \end{cases}$$

В случае, если известна ненулевая температура на нижней границе в условии (4), то задачу разбиваем на две подзадачи, когда температура равна нулю на нижней границе для первой подзадачи, а затем на верхней для второй подзадачи. Решение происходит по приведенному методу для каждого случая, после чего находится суперпозиция решений.

Пример расчета

Исследовалось влияние коэффициентов теплопроводности среднего слоя на распределение температуры в трехслойной плите. Для этого рассмотрим плиту с безразмерными толщинами $h_1 = h_2 = h_3 = 1$. На верхней границе верхней плиты задается функция $f(x) = 1 + \cos x - \cos 2x$, а на нижней границе нижней плиты температура поддерживается нулевой.

Рассмотрим случаи следующих коэффициентов теплопроводности:

- а) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$; б) $\alpha_1 = \alpha_3, \alpha_2 = 10\alpha_3$; в) $\alpha_1 = \alpha_3, \alpha_2 = 0,1\alpha_3$.

Поскольку функция $f(x)$ есть тригонометрический полином 2-й степени, то для получения точного решения достаточно удержать две гармоники кроме нулевой. На графиках (рис. 2, а, б, в)) изображена температура на границах слоев в рамках одного периода для случаев а, б, в.

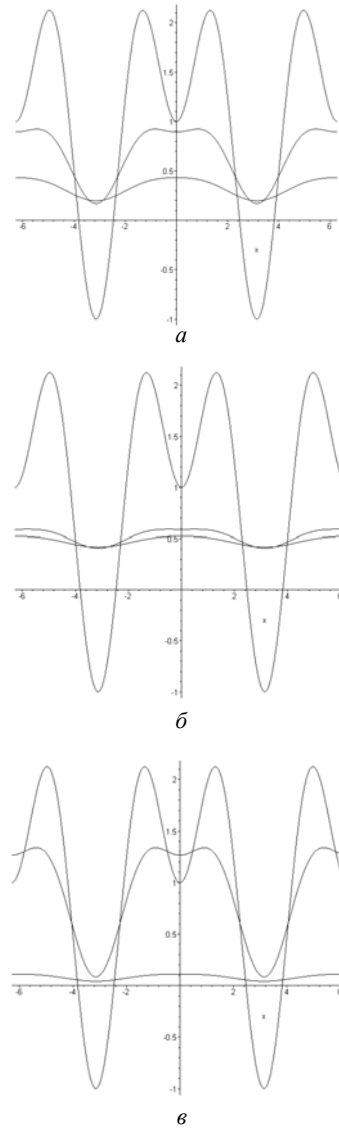


Рис. 2. Температура на границах слоев

На графиках (рис. 3, а, б, в) изображена температура по глубине плиты в сечениях $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ при тех же, сформулированных выше, условиях.

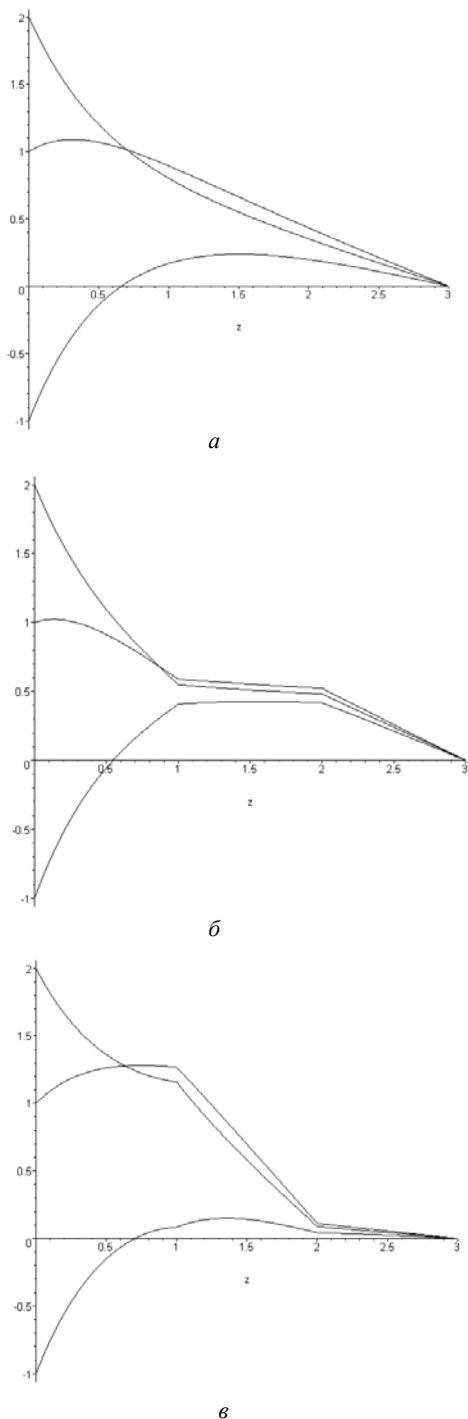


Рис. 3. Температура в сечениях по глубине плиты

Из анализа рис.2 и рис.3 можно сделать вывод, что в слоях с высоким значением коэффициента теплопроводности температура мало изменяется, а в слоях под ними температура является практически постоянной

по горизонтальной координате и линейной по глубине. Это согласуется с физическим смыслом, что подтверждает достоверность полученных результатов.

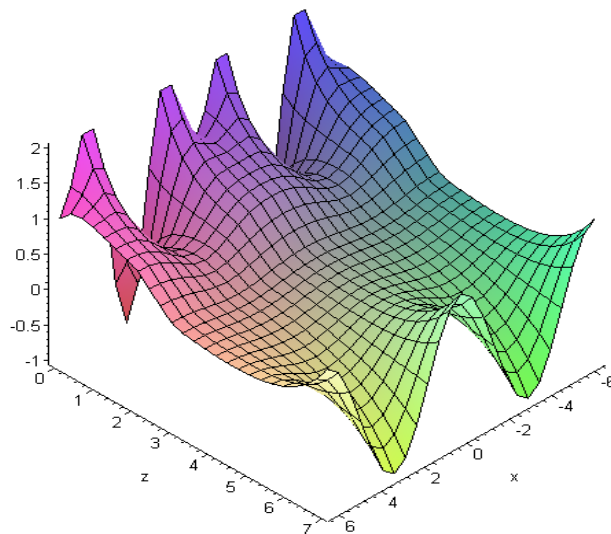


Рис. 4. Температура в трехслойной плите при неоднородных условиях

Для иллюстрации случая, когда ненулевая температура задается на обеих границах плиты, приведен трехмерный график функции температуры для трех слоев (рис. 4). Здесь на верхней границе верхней плиты задается функция $f(x) = 1 + \cos x - \cos 2x$, а на нижней границе нижней плиты $g(x) = \cos x$. Слои задаются толщинами $h_1 = 2, h_2 = 1, h_3 = 4$ и коэффициентами теплопроводности $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 5$. Как видим, средний слой имеет практически нулевую температуру, а температурные колебания происходят в верхнем и нижнем слоях.

Выводы

В работе предложен метод точного решения двумерной стационарной задачи о распределении температур в многослойной плите с плоскопараллельными границами. Заданные функции, описывающие температуру на верхней и нижней границах, считаются периодическими с одинаковыми периодами. Используется модификация метода матриц податливости, которая хорошо зарекомендовала себя при решении задач теории упругости для многослойных тел. Основным преимуществом данного метода есть линейное возрастание объема вычислений с ростом количества слоев.

Предложенные и апробированные в работе алгоритмы в дальнейшем планируется использовать для систематического изучения свойств существенно многослойных конструкций, находящихся под действием тепловых полей с большими градиентами.

Список литературы

1. Ухин Д. В. Математическая модель расчета температуры многослойной конструкции дорожной одежды в условиях перемены температур / Д. В. Ухин // Вестник ВолгАСУ. Сер. : Стр-во и архит. 2010 – Вып. 17(36). – С. 66–69.
2. Подстригач Я. С. Теплоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно // М. : Наука, 1984. – 368 с.
3. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / Коваленко А. Д. – К. : Наук. Думка, 1970. – 307 с.
4. Кудинов В. А. Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций / В. А. Кадинов, Э. М. Каргашов, В. В. Калашников // М. : Высшю шк. – 2005. – 430 с.
5. Алтухов Е. В. Метод однородных решений в трехмерных задачах термоупругости для транспортных пластин / Е. В. Алтухов // Теорет. и прикл. мех. (Киев). – 2003. – № 37. – С. 8–13.
6. Алтухов Е. В. Однородные решения трехмерных задач о распространении гармонических волн в транспортных термоупругих пластинах / Е. В. Алтухов, В. П. Шевченко // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 49–53.
7. Процюк Б. В. Метод функций Грина в осесимметричных задачах пружности та термопружності кусково-однорідних ортотропних тіл / Б. В. Процюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 1. – С. 94–101.
8. Горынин Г. Л. Метод жесткостных функций в задачах расчета многослойных стержней при температурных нагрузках / Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 2. – С. 144–155.
9. Neng-Hus Zhang Thermoelastic stresses in multilayered beams / Neng-Hus Zhang // Thin Solid Films. – 2007. – 515. – P. 8402–8406.
10. Величко О. В. Плоска деформація пружної багатошарової плити під дією періодичної системи навантажень / О. В. Величко // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка. – Дніпропетровськ: видавництво Дніпропетровського університету – 2004. – № 6. – Вип. 8. – Т. 1. – С. 162–170.
11. Велико І. Г. Просторова термопружна деформація багатошарової основи / І. Г. Велико, І. Г. Ткаченко // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8. – Т. 1. – № 6. – С. 154–161.
12. Величко І. Г. Просторова та осесиметрична термопружна деформація багатошарової основи / І. Г. Величко, І. Г. Ткаченко // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8. – Т. 2. – № 6/2. – С. 36–43.
13. Ткаченко І. Г. Двовірна мішана задача термопружності для багатошарової основи / І. Г. Ткаченко // Прикладні пробл. механіки та математики. – 2005. – Вип. 3 – С. 70–78.

Одержано 20.11.2014

Бойко С.Б., Величко І.Г. Розрахунок двовимірних теплових стаціонарних періодичних полів в багатошарових плитах

Запропоновано метод розрахунку теплових стаціонарних, періодичних по просторовій координаті, полів у багатошарових плитах. На верхній межі плити температура описується парною періодичною функцією. На нижній межі плити температура нульова. На спільних кордонах шарів виконується умова безперервності температурного поля і рівність теплових потоків. Розв'язання узагальнено для випадку відомих температур на верхній і нижній межах плити, заданих періодичними функціями з однаковими періодами. Наведені приклади результатів числових досліджень для різних граничних умов. Проведено порівняльний аналіз і зроблені висновки.

Ключові слова: багатошарові плити, гармонійне рівняння, рекурентні співвідношення, послідовності піддатливості, закон Фур'є.

Velichko S., Boyko I. Calculation of two-dimensional stationary periodic thermal fields in multilayered plates

Methods for calculating thermal stationary periodic fields in the multidimensional case are given. On the upper boundary plate temperature is described with even periodic function. On the lower boundary plate temperature is zero. On the common boundary layers, the condition of continuity of the temperature field and heat flow equation is fulfilled. Generalized solution for periodic functions defined on the upper and lower boundaries of the plates was found. The examples of the results of numerical studies for different input data are given. A comparative analysis and conclusions have been done.

Key words: multilayer plates, harmonic equation, recurrence relations, compliance sequence, the laws of Fourier.