ІІІ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В МЕТАЛУРГІЇ ТА МАШИНОБУДУВАННІ

УДК 531. 31/39:519.85

Канд. физ.-мат.наук И. А. Костюшко

Запорожский национальный университет, г. Запорожье

КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ДВУХЗВЕННОГО МАЯТНИКА СО СЛЕДЯЩЕЙ И КОНСЕРВАТИВНОЙ СИЛАМИ С УЧЕТОМ В ШАРНИРАХ НЕЛИНЕЙНЫХ МОМЕНТОВ

Рассмотрен маятник Циглера с вязкоупругими шарнирами, дополнительно нагруженный консервативной и следящей силой. Решена задача устойчивости положения равновесия в нелинейной постановке. Показана дестабилизация равновесия системы малыми диссипативными силами. Найдено значение консервативной силы, при котором дестабилизации не происходит. Рассмотрен критический случай устойчивости одного нулевого и пары чисто мнимых корней характеристического уравнения.

Ключевые слова: *маятник Циглера, устойчивость движения, дестабилизация движения, критический случай, вязкоупругие шарниры, нелинейные моменты, следящая и консервативная силы.*

Уравнения движения

Рассмотрим маятник Циглера, представляющий собой систему двух невесомых стержней K_1K_2, K_2K_3 одинаковой длины l (рис. 1).

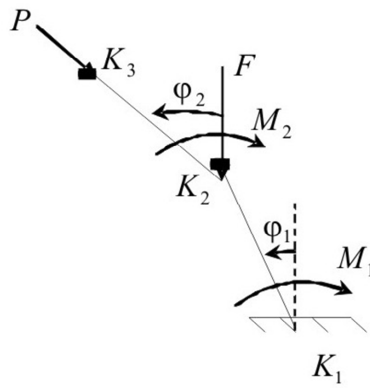

Рис. 1. Маятник Циглера под действием следящей и консервативной сил

Шарниры обладают вязкоупругими свойствами, так что восстанавливающие моменты в них равны

$$M_1 = -A\theta_1 - B\dot{\theta}_1 - C\dot{\theta}_1^3 - D\theta_1^2\dot{\theta}_1,$$

$$M_2 = -A(\theta_2 - \theta_1) - B(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - \\ - C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^3 - D(\theta_2 - \theta_1)^2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1).$$

Здесь A, B, C, D – заданные положительные постоянные. В шарнире K_2 и на свободном конце K_3 расположены две одинаковые массы m. На свободный конец маятника K_3 действует следящая сила P, направленная вдоль стержня K_2K_3, на шарнир K_2 действует постоянная по величине и направлению консервативная сила P, направленная вертикально вниз.

Положение маятника определяется углами φ_1 и φ_2. Уравнения движения системы запишем согласно уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_k} = Q_k - \frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}_k}, \quad k = 1, 2, \tag{1}$$

где $L = K - \Pi$, K, Π – кинетическая и потенциальная энергии соответственно, имеющие следующий вид

$$2K = ml^2\left(2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right), \tag{2}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}A\varphi_1^2 + \frac{1}{2}A(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + Fl(\cos\varphi_1 - 1). \tag{3}$$

Q_k – обобщенная сила, соответствующая i -й координате, так что

$$Q_1 = Pl\sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad Q_2 = 0; \tag{4}$$

W – дисипативная функция Рэллея

$$W = \frac{1}{2}B\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}B(\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1)^2 + \frac{1}{4}C\dot\varphi_1^4 + $$
$$+ \frac{1}{4}C(\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1)^4 + \frac{1}{2}D\varphi_1^2\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}D(\varphi_2 - \varphi_1)^2(\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1)^2 \tag{5}$$

точка означает дифференцирование по времени t.

Подставляя соотношения (2)–(5) в (1), получаем уравнения движения маятника

$$\begin{cases} 2ml^2\ddot\varphi_1 + ml^2\ddot\varphi_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + ml^2\dot\varphi_2^2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \\ = A(\varphi_2 - 2\varphi_1) + B(\dot\varphi_2 - 2\dot\varphi_1) - \\ - C\dot\varphi_1^3 + C(\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1)^3 + D(\varphi_2 - \varphi_1)^2(\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1) - \\ - D\varphi_1^2\dot\varphi_1 + Fl\sin\varphi_1 + Pl\sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \\ ml^2\ddot\varphi_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + ml^2\ddot\varphi_2 + ml^2\dot\varphi_1^2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \\ = -A(\varphi_2 - \varphi_1) - B(\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1) - \\ - C(\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1)^3 - D(\varphi_2 - \varphi_1)^2(\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1). \end{cases} \tag{6}$$

Вводим безразмерное время $\tau = t\sqrt{\dfrac{A}{ml^2}}$, приводим систему (6) к безразмерному виду

$$\begin{cases} 2\varphi_1'' + \varphi_2''\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2'^2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \varphi_2 - 2\varphi_1 + \\ + b(\varphi_2' - 2\varphi_1') - c\varphi_1'^3 + c(\varphi_2' - \varphi_1')^3 + d(\varphi_1 - \varphi_2)^2(\varphi_2' - \varphi_1') - \\ - d\varphi_1^2\varphi_1' + f\sin\varphi_1 + p\sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \\ \varphi_1''\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2'' + \varphi_1'^2\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \varphi_1 - \varphi_2 - \\ - b(\varphi_2' - \varphi_1') - c(\varphi_2' - \varphi_1')^3 - d(\varphi_2 - \varphi_1)^2(\varphi_2' - \varphi_1'); \end{cases} \tag{7}$$

где

$$b = \frac{B}{\sqrt{Aml^2}},\ c = \frac{C}{ml^3}\sqrt{\frac{A}{m}},\ d = \frac{D}{\sqrt{Aml^2}},\ f = \frac{Fl}{A},\ p = \frac{Pl}{A}$$ –

безразмерные параметры задачи; штрих означает дифференцирование по τ.

Записывая систему (7) в нормальной форме, введя новые переменные $z_1 = \varphi_1, z_2 = \varphi_2, z_3 = \varphi_1', z_4 = \varphi_2'$ и разлагая нелинейные слагаемые полученной системы в ряды Маклорена, ограничиваясь членами третьего порядка, приходим к новой системе дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} z_1' = z_3, \\ z_2' = z_4, \\ z_3' = (p + f - 3)z_1 + (2 - p)z_2 - 3bz_3 + 2bz_4 - \\ (z_1 - z_2)(z_3^2 + z_4^2) - \frac{b}{2}(z_1 - z_2)^2(5z_4 - 7z_3) + \\ + \frac{1}{6}(z_1 - z_2)^3(3 - p) - z_1(z_1 - z_2)^2(p + f - 3) - \\ z_2(z_1 - z_2)^2(2 - p) - \frac{1}{6}fz_1^3 + 2c(z_4 - z_3)^3 - \\ - cz_3^3 + 2d(z_1 - z_2)^2(z_4 - z_3) - dz_1^2z_3 + \ldots \\ \\ z_4' = (4 - f - p)z_1 + (p - 3)z_2 + 4bz_3 - 3bz_4 + \\ (z_1 - z_2)(2z_3^2 + z_4^2) + \frac{1}{2}b(z_1 - z_2)^2(-10z_3 + 7z_4) + \\ + z_1(z_1 - z_2)^2\left(f + \frac{5}{3}p - 5\right) + z_2(z_1 - z_2)^2\left(\frac{7}{2} - \frac{5}{3}p\right) - \\ 3c(z_4 - z_3)^3 + cz_3^3 - \\ - 3d(z_1 - z_2)^2(z_4 - z_3) + dz_1^2z_3 + \\ + \frac{1}{12}f\left[(2z_1 - z_2)^3 + z_2^3\right] + \ldots \end{cases} \tag{8}$$

Исследование устойчивости по первому приближению

Система первого приближения согласно (8) имеет вид

$$\begin{cases} z_1' = z_3, \\ z_2' = z_4, \\ z_3' = (p + f - 3)z_1 + (2 - p)z_2 - 3bz_3 + 2bz_4, \\ z_4' = (4 - f - p)z_1 + (p - 3)z_2 + 4bz_3 - 3bz_4. \end{cases} \tag{9}$$

Записывая соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 6b\lambda^3 + \lambda^2(b^2 - 2p - f + 6) + \lambda(2b - bf) - f + 1 = 0, \tag{10}$$

согласно критерия Рауса-Гурвица получаем условия асимптотической устойчивости системы (7)

$$\begin{cases} f < 1, \\ p < \tilde p, \quad \tilde p = \dfrac{6b^2 - 3b^2f - 4f + \frac{5}{2}f^2 + 16}{6(2 - f)}. \end{cases} \tag{11}$$

При

$$\begin{cases} f = 1, \\ p < \tilde p, \quad \tilde p = \dfrac{1}{6}\left(3b^2 + \dfrac{29}{2}\right) \end{cases} \tag{12}$$

характеристическое уравнение (10) имеет один нулевой корень и три корня с отрицательными действительными частями.

При

$$\begin{cases} f < 1, \\ p = \tilde{p}, \quad \tilde{p} = \dfrac{6b^2 - 3b^2 f - 4f + \frac{5}{2} f^2 + 16}{6(2-f)} \end{cases} \tag{13}$$

уравнение (10) имеет пару чисто мнимых корней и два корня с отрицательными действительными частями.

При

$$\begin{cases} f = 1, \\ p = \tilde{p}, \quad \tilde{p} = \dfrac{6b^2 + 29}{12} \end{cases} \tag{14}$$

получаем один нулевой и пару чисто мнимых корней уравнения (10).

В случаях (12)–(14) присутствие нулевого и чисто мнимых корней характеристического уравнения подразумевает критический случай устойчивости. Следовательно проблему устойчивости следует решать, учитывая нелинейные слагаемые системы (8). Случаи (12), (13) исследованы в работе [1]. Установлено, что в случае (12) тривиальное решение системы (8) всегда асимптотически устойчиво. В случае (13) можно найти значение критической нагрузки f^*, такое что при $f < f^*$ имеет место асимптотическая устойчивость, а при $f^* < f < 1$ – неустойчивость нулевого положения равновесия системы (8).

Критический случай устойчивости одного нулевого и пары чисто мнимых корней

Рассмотрим случай (14). Характеристическое уравнение (10) принимает вид

$$\lambda^4 + 6b\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^2 + b\lambda = 0$$

и имеет один отрицательный $\lambda_1 = -6b$, один нулевой $\lambda_2 = 0$ и два мнимых корня $\lambda_{3,4} = \pm\tilde{\lambda} i, \tilde{\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

При выполнении условий (14) система (8) примет вид

$$\begin{cases} z_1' = z_3, \\ z_2' = z_4, \\ z_3' = \left(\dfrac{b^2}{2} + \dfrac{5}{12}\right) z_1 - \left(\dfrac{b^2}{2} + \dfrac{5}{12}\right) z_2 - \\ -3bz_3 + 2bz_4 + Z_3(z_1, z_2, z_3, z_4), \\ z_4' = \left(-\dfrac{b^2}{2} + \dfrac{7}{12}\right) z_1 - \left(-\dfrac{b^2}{2} + \dfrac{7}{12}\right) z_2 + \\ +4bz_3 - 3bz_4 + Z_4(z_1, z_2, z_3, z_4); \end{cases}$$

$$Z_3(z_1, z_2, z_3, z_4) = -(z_1 - z_2)(z_3^2 + z_4^2) - \frac{b}{2}(z_1 - z_2)^2(5z_4 - 7z_3) - \left(\frac{7b^2}{12} + \frac{23}{72}\right)(z_1 - z_2)^3 - $$
$$- \frac{1}{6} z_1^3 + 2c(z_4 - z_3)^3 - cz_3^3 + 2d(z_1 - z_2)^2(z_4 - z_3) - $$
$$- dz_1^2 z_3 + \ldots;$$

$$Z_4(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1 - z_2)(2z_3^2 + z_4^2) + $$
$$+ b(z_1 - z_2)^2\left(-5z_3 + \frac{7}{2} z_4\right) + $$
$$+ z_1(z_1 - z_2)^2\left(\frac{5b^2}{6} + \frac{1}{36}\right) - $$
$$- z_2(z_1 - z_2)^2\left(\frac{5b^2}{6} + \frac{19}{36}\right) - 3c(z_4 - z_3)^3 + $$
$$+ cz_3^3 - 3d(z_1 - z_2)^2(z_4 - z_3) + dz_1^2 z_3 + $$
$$+ \frac{1}{12}\left[(2z_1 - z_2)^3 + z_2^3\right] + \ldots \quad . \tag{15}$$

Здесь многоточие означает совокупность слагаемых порядка не ниже четвертого. Если задачу не удастся решить слагаемыми третьего порядка, то необходимо рассмотреть слагаемые более высокого порядка.

В (15) введем новую переменную $x = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4$. Коэффициенты $a_1 \left(i = \overline{1,4}\right)$ выбираем таким образом, чтобы для линейных слагаемых системы (15) выполнялось равенство $\dfrac{dx}{d\tau} = 0$. В итоге находим:

$$a_1 = -b\frac{6b^2 + 41}{6b^2 + 5},\ a_2 = b\frac{6b^2 + 29}{6b^2 + 5},\ a_3 = \frac{6b^2 - 7}{6b^2 + 5},\ a_4 = 1.$$

В новых переменных (x, z_2, z_3, z_4) система (15) примет вид:

$$\begin{cases} x' = a_3 \tilde{Z}_3(x, z_2, z_3, z_4) + a_4 \tilde{Z}_4(x, z_2, z_3, z_4), \\ z_2' = z_4, \\ z_3' = \dfrac{1}{12b(6b^2 + 41)} \times \\ \times\left[-(6b^2 + 5)^2 x - 12b(6b^2 + 5) z_2 - (180b^4 + 1488b^2 + 35) z_3 + \right. \\ \left. + (180b^4 + 1044b^2 + 25) z_4\right] + \tilde{Z}_3(x, z_2, z_3, z_4), \\ z_4' = \dfrac{1}{12b(6b^2 + 41)} \times \\ \times\left[(6b^2 + 5)(6b^2 - 7)x + 12b(6b^2 - 7) z_2 + (42b^2 - 1)(6b^2 + 49) z_3 - \right. \\ \left. - (6b^2 + 35)(42b^2 - 1) z_4\right] + \tilde{Z}_4(x, z_2, z_3, z_4); \end{cases} \tag{16}$$

где

$$\widetilde{Z}_i(x, z_2, z_3, z_4) = Z_i\left(\frac{x - a_2 z_2 - a_3 z_3 - a_4 z}{a_1}, z_2, z_3, z_4\right), i = 3,4.$$

В системе (16) вводим две комплексно-сопряженные переменные

$$x_1 = c_1 x + c_2 z_2 + c_3 z_3 + c_4 z_4,$$
$$y_1 = \overline{x_1} = \overline{c_1} x + \overline{c_2} z_2 + \overline{c_3} z_3 + \overline{c_4} z_4.$$

Здесь черта означает сопряжение. Константы $c_i \ \left(i = \overline{1,4}\right)$ выбираем так, чтобы для линейных слагаемых системы (16) выполнялись соотношения $\frac{dx_1}{d\tau} = i\widetilde{\lambda} x_1$, $\frac{dy_1}{d\tau} = -i\widetilde{\lambda} y_1$. Приравнивая в данных уравнениях коэффициенты при независимых переменных $x, z_i \ \left(i = \overline{1,4}\right)$ находим

$$c_1 = \frac{6b^2 + 5}{12b\left(6b^2 + 41\right)}, \quad c_2 = \frac{1}{6b^2 + 41},$$

$$c_3 = -\frac{\left(42b^2 - 1\right)\left(7 - 6b^2 + 41\sqrt{6}bi + 6\sqrt{6}b^3 i\right)}{12b\left(6b^2 + 41\right)\left(36b^4 + 204b^2 + 1\right)},$$

$$c_4 = -\frac{5}{492b} - \frac{18b}{41\left(6b^2 + 41\right)} + \frac{36b^3 + 30b - \sqrt{6}i\left(30b^2 + 1\right)}{12\left(36b^4 + 204b^2 + 1\right)}.$$

В переменных (x, x_1, y_1, z_3) система (16) перепишется следующим образом

$$\begin{cases} x' = a_3 \widetilde{Z}_3 + a_4 \widetilde{Z}_4, \\ x_1' = i\widetilde{\lambda} x_1 + (c_1 a_3 + c_3)\widetilde{Z}_3 + (c_1 a_4 + c_4)\widetilde{Z}_4, \\ y_1' = -i\widetilde{\lambda} y_1 + \left(\overline{c_1} a_3 + \overline{c_3}\right)\widetilde{Z}_3 + \left(\overline{c_1} a_4 + \overline{c_4}\right)\widetilde{Z}_4, \\ z_3' = k_1 x + k_2 x_1 + k_3 y_1 + k_4 z_3 + \widetilde{Z}_3; \end{cases} \tag{17}$$

где

$$\widetilde{Z}_i = \widetilde{Z}_i(x, m_1 x_1 + m_2 y_1 + m_3 x + m_4 z_3, z_3, n_1 x_1 + n_2 y_1 + n_3 x + n_4 z_3),$$
$$(i = 3,4),$$

m_i, n_i, k_i – известные постоянные, представляющие собой линейные комбинации коэффициентов $c_i, b \ \left(i = \overline{1,4}\right)$.

Согласно основной теореме о критических случаях [2] ищем функцию $u(x, x_1, y_1)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}\left(a_3 \widetilde{Z}_3 + a_4 \widetilde{Z}_4\right) + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial x_1}\left[i\widetilde{\lambda} x_1 + (c_1 a_3 + c_3)\widetilde{Z}_3 + (c_1 a_4 + c_4)\widetilde{Z}_4\right] + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial y_1}\left[-i\widetilde{\lambda} y_1 + \left(\overline{c_1} a_3 + \overline{c_3}\right)\widetilde{Z}_3 + \left(\overline{c_1} a_4 + \overline{c_4}\right)\widetilde{Z}_4\right] = \\ &= k_1 x + k_2 x_1 + k_3 y_1 + k_4 u. \end{aligned} \tag{18}$$

В (18)

$$\widetilde{Z}_i = \widetilde{Z}_i(x, m_1 x_1 + m_2 y_1 + m_3 x + m_4 u, u, n_1 x_1 + n_2 y_1 + n_3 x + n_4 u),$$
$$(i = 3,4).$$

Функцию u ищем в виде $u(x, x_1, y_1) = l_1 x + l_2 x_1 + l_3 y_1$. Подстановка последнего выражения в (18) определяет неизвестные значения констант $l_1 = -\frac{k_1}{k_4}, l_2 = -\frac{k_2}{k_4 - \widetilde{\lambda} i}, l_3 = -\frac{k_3}{k_4 + \widetilde{\lambda} i}$. Таким образом, задача об устойчивости для системы (17) эквивалентна аналогичной задаче для системы

$$\begin{cases} x' = a_3 \widetilde{Z}_3 + a_4 \widetilde{Z}_4, \\ x_1' = i\widetilde{\lambda} x_1 + (c_1 a_3 + c_3)\widetilde{Z}_3 + (c_1 a_4 + c_4)\widetilde{Z}_4, \\ y_1' = -i\widetilde{\lambda} y_1 + \left(\overline{c_1} a_3 + \overline{c_3}\right)\widetilde{Z}_3 + \left(\overline{c_1} a_4 + \overline{c_4}\right)\widetilde{Z}_4, \end{cases} \tag{19}$$

где

$$\widetilde{Z}_i = \widetilde{Z}_i(x, \ F_1 x + F_2 x_1 + F_3 y_1, \ l_1 x + l_2 x_1 + l_3 y_1, \ G_1 x + G_2 x_1 + G_3 y_1),$$
$$(i = 3,4),$$

$$F_1 = m_3 + m_4 l_1, \ F_2 = m_1 + m_4 l_2, \ F_3 = m_2 + m_4 l_3,$$

$$G_1 = n_3 + n_4 l_1, \ G_2 = n_1 + n_4 l_2, G_3 = n_2 + n_4 l_3.$$

Используя метод нормальной формы [3, 4], существует полиномиальное преобразование переменных

$$x = v + P_3(v, v_1, w_1),$$
$$y_1 = w_1 + R_3(v, v_1, w_1),$$
$$x_1 = v_1 + Q_3(v, v_1, w_1),$$

где

$$x = v + P_3(v, v_1, w_1),$$
$$y_1 = w_1 + R_3(v, v_1, w_1),$$
$$x_1 = v_1 + Q_3(v, v_1, w_1),$$

$$\begin{cases} v' = C^{(3,0,0)} v^3 + C^{(1,1,1)} v v_1 w_1, \\ v_1' = i\widetilde{\lambda} v_1 + C_1^{(2,1,0)} v^2 v_1 + C_1^{(0,2,1)} v_1^2 w_1, \\ w_1' = -i\widetilde{\lambda} w_1 + \overline{C}^{(0,1,2)} v_1 w_1^2 + \overline{C}^{(2,0,12)} v^2 w_1. \end{cases} \tag{21}$$

Здесь значения $C^{(3,0,0)}, C^{(1,1,1)}$ равны коэффициентам при x^3; $x x_1 y_1$ разложения $a_3 \widetilde{Z}_3 + a_4 \widetilde{Z}_4$; $C_1^{(2,1,0)}, C_1^{(0,2,1)}$ – коэффициенты при $x^2 x_1$, $x_1^2 y_1$ разложения $(c_1 a_3 + c_3)\widetilde{Z}_3 + (c_1 a_4 + c_4)\widetilde{Z}_4$; $\overline{C}^{(0,1,2)}, \overline{C}^{(2,0,12)}$ – коэффициенты при $y_1^2 x_1$, $x^2 y_1$ разложения $\left(\overline{c_1} a_3 + \overline{c_3}\right)\widetilde{Z}_3 + \left(\overline{c_1} a_4 + \overline{c_4}\right)\widetilde{Z}_4$; функции $\widetilde{Z}_i$ определены формулами (20).

В системе (21) делаем замену переменных $v_1=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, $w_1=\rho(\cos\theta-i\sin\theta)$, выделяя в полученной системе действительные и мнимые части, приходим к задаче об устойчивости для системы следующего вида:

$$\begin{cases} v' = C^{(3,0,0)}v^3 + C^{(1,1,1)}v\rho^2 + U_*(v,\rho,\theta),\\ \rho' = \operatorname{Re}C_1^{(2,1,0)}v^2\rho + \operatorname{Re}C_1^{(0,2,1)}\rho^3 + R(v,\rho,\theta).\end{cases} \qquad (22)$$

Функции U_*, R при достаточно малых ρ, v и любом θ удовлетворяют условиям:

$$|U_*(v,\rho,\theta)| < C(|v|+|\rho|)^4,\ |R(v,\rho,\theta)| < C(|v|+|\rho|)^4,$$

где $C>0$ – постоянная.

Если положение равновесия $v=\rho=0$ для уравнений (22) (где θ – произвольная функция времени) будет устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво при любом выборе функций U_*, R, то положение равновесия $x=x_1=y_1=0$ для системы (19) будет соответственно устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво. Этот же вывод справедлив и для положения равновесия $z_1=z_2=z_3=z_4=0$ системы (15).

Систему (22) перепишем в виде:

$$\begin{cases} v' = U_*^{(3)}(v,\rho) + U_*(v,\rho),\\ \rho' = R^{(3)}(v,\rho) + R(v,\rho).\end{cases}$$

Рассмотрим две формы четвертого порядка

$$G(v,\rho) = vR^{(3)} - \rho U_*^{(3)} =$$
$$= v\rho\left[v^2\left(\operatorname{Re}C_1^{(2,1,0)} - C^{(3,0,0)}\right)\right] +$$
$$+\rho^2\left(\operatorname{Re}C_1^{(0,2,1)} - C^{(1,1,1)}\right),$$

$$P(v,\rho) = vU_*^{(3)} + \rho R^{(3)} =$$
$$= C^{(3,0,0)}v^4 + v^2\rho^2\left[v^2\left(C^{(1,1,1)} + \operatorname{Re}C_1^{(2,1,0)}\right)\right] +$$
$$+\rho^4\operatorname{Re}C_1^{(0,2,1)}.$$

Форма $G(v,\rho)$ не является знакоопределенной. В этом случае [2] нулевое положение системы (22) будет неустойчиво, если существует хотя бы одна вещественная прямая $G(v,\rho)=0$, на которой $P(v,\rho)$ может принимать положительные значения, и асимптотически устойчиво, если на всех вещественных прямых $G(v,\rho)=0$ форма $P(v,\rho)$ может принимать только отрицательные значения.

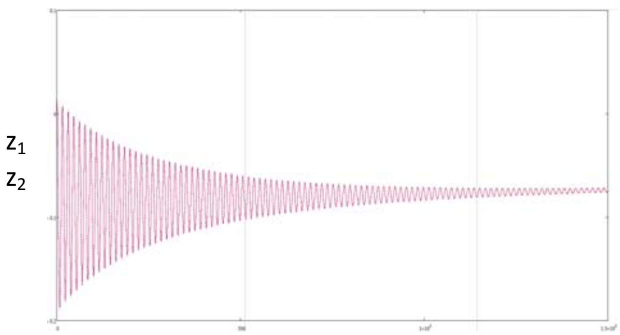

Рис. 2. Зависимость $z_i(\tau)$ $(i=1,2)$ при $b=10, c=0{,}1, d=5$

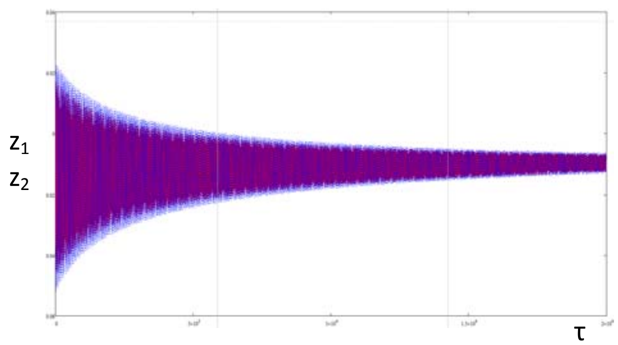

Рис. 3. Зависимость $z_i(\tau)$ $(i=1,2)$ при $b=2{,}5, c=8, d=10$

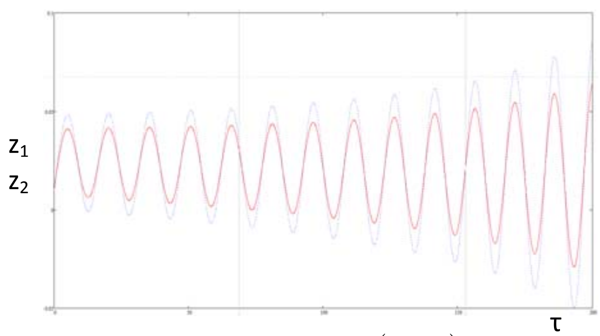

Рис. 4. Зависимость $z_i(\tau)$ $(i=1,2)$ при $b=0{,}1, c=0{,}2, d=5$

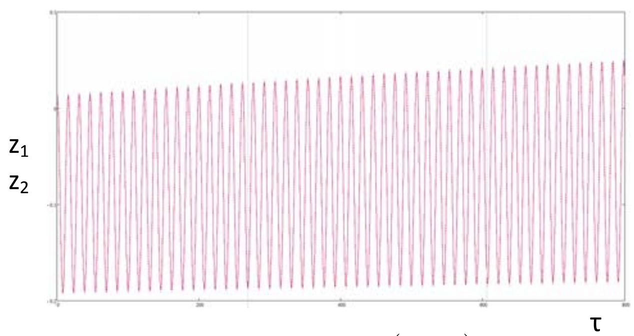

Рис. 5. Зависимость $z_i(\tau)$ $(i=1,2)$ при $b=10, c=0{,}1, d=0{,}005$

Уравнение $G(v,\rho)=0$ задает следующие прямые:

$$v=0, \quad \rho=0, \ \rho=\sqrt{\frac{C^{(3,0,0)}-\operatorname{Re}C_1^{(2,1,0)}}{\operatorname{Re}C_1^{(0,2,1)}-C^{(1,1,1)}}}\ .$$

На этих прямых нужно проверить знак формы $P(v,\rho)$. Так как $P(0,\rho)=\rho^4\operatorname{Re}C_1^{(0,2,1)}$, то $signP(0,\rho)=sign\operatorname{Re}C_1^{(0,2,1)}$. В частном случае задачи при $c=d=0$ получаем $\operatorname{Re}C_1^{(0,2,1)}=\dfrac{9b\left(144b^2+509\right)\left(36b^4+1\right)}{\left(216b^2+1\right)^2}>0$, что означает неустойчивость нулевого положения равновесия системы (15) для любых положительных значений параметра b.

В общем случае задачи $b^2+c^2+d^2\neq 0$ можно найти область изменения указанных параметров, где имеет место асимптотическая устойчивость. Эта область ограничена системой неравенств:

$$\begin{cases} b>\sqrt{\dfrac{\sqrt{31081}-169}{72}}; \\ c+2d>\dfrac{4b\left(169b^2+509\right)}{3\left(72b^4+338b^2-35\right)}. \end{cases} \qquad (23)$$

Вне указанной области имеет место неустойчивость нулевого положения равновесия системы (15).

На рис. 2–5 приведено численное решение дифференциальных уравнений (15) при начальных условиях $z_i(0)=0{,}01\left(i=\overline{1,4}\right)$. Рис. 2, 3 соответствуют выбору параметров задачи b,c,d, удовлетворяющих условиям (23). Рис. 4, 5 соответствуют значениям указанных параметров, находящихся вне области (23).

Согласование численных и аналитических результатов свидетельствуют о достоверности последних.

Список литературы

1. Куземко А. В. Устойчивость равновесия двухзвенного маятника со следящей и консервативной силами с учетом в шарнирах нелинейных моментов / Куземко А. В.// Вісник запорізького національного університету : Математичне моделювання і прикладна механіка. – 2010. – № 2. – С. 76–83.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 432 с.
3. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики / В. Ф. Журавлев. – М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2001. – 320 с.
4. Журавлев В. Ф. Прикладные методы в теории колебаний / В. Ф. Журавлев, Д. Климов. – М. : Наука, 1988. – 328 с.

Одержано 06.10.2014

Костюшко І.А. Критичний випадок стійкості рівноваги двохланкового маятника із стежачою і консервативною силами з обліком у шарнірах нелінійних моментів

Розглянуто маятник Циглера з в'язкопружними шарнірами, додатково навантажений консервативною і стежачою силою. Розв'язано задачу стійкості положення рівноваги в нелінійній постановці. Показана дестабілізація рівноваги системи малими дисипативними силами. Знайдено значення консервативної сили, при якому дестабілізації не відбувається. Розглянуто критичний випадок стійкості одного нульового і пари чисто уявних коренів характеристичного рівняння.

***Ключові слова**: маятник Циглера, стійкість руху, дестабілізація руху, критичний випадок, в'язкопружні шарніри, нелінійні моменти, стежача і консервативна сили.*

Kostushko I. Critical case of stability of equilibrium of double-link pendulum with tracker and conservative forces recognition in hinges of nonlinear moments

The Tsigler pendulum with the viscoelastic hinges, in addition loaded with conservative and watching force is considered. The problem of stability of balance position in nonlinear statement is solved. Destabilization of system balance with small dissipative forces is shown. Value of conservative force at which destabilizations doesn't occur is found. Critical case of stability of one zero and steams of purely imaginary roots of the characteristic equation is considered.

***Key words**: Tsigler pendulum, stability of movement, movement destabilization, a critical case, viscoelastic hinges, the nonlinear moments, watching and conservative forces.*