УДК 539.371

Л. О. Рак

Запорізький національний університет, м. Запоріжжя

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ СКЛАДЕНОГО ТІЛА З ДВОХ ПЛАСТИН, З'ЄДНАНИХ ПІД ДОВІЛЬНИМ КУТОМ, ЗА ДОПОМОГОЮ МАТРИЦЬ ТИПУ ГРІНА

Робота присвячена розв'язанню задачі про напружено-деформований стан конструкції, складеної з двох пластин, з'єднаних між собою під довільним кутом і жорстко затиснутих на інших краях у переміщеннях та подальшій побудові матриць типу Гріна з урахуванням граничних умов та умов з'єднання пластин.

Ключові слова: *напружено-деформований стан, складена конструкція з двох пластин з'єднаних під довільним кутом, розв'язок у переміщеннях, матриця типу Гріна.*

Вступ

Сучасний процес розвитку промисловості, будівництва, різних форм транспорту та інших галузей економіки вимагає створення все більш складних технічних конструкцій. З урахуванням вимог до умов роботи та ускладнень вони набувають структури, часто складеної з елементів, які відрізняються фізичними параметрами.

Матриця Гріна, побудована для систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл, дозволяє виразити розв'язок крайової задачі для вказаних систем вигляді інтегралів від добутку матриці Гріна на вектори правих частин.

Метод побудови матриць типу Гріна є ефективним інструментом розв'язку задач теорії пружності для складених тіл довільної геометрії з різними граничними умовами і умовами з'єднання секцій. У роботі розрахунок напружень та переміщень у зоні локального навантаження між двома прямокутними пластинами, з'єднаними під довільним кутом між собою та жорстко затисненими з інших боків, виконано запропонованим методом.

Матеріали та методика досліджень

Задана складена конструкція з двох прямокутних пластин, жорстко затиснутих на краях та з'єднаних між собою під довільним кутом α, який під час деформації конструкції вважається незмінним. Потрібно дослідити напружено-деформований стан цієї конструкції під дією нормального навантаження.

Розв'язок задачі подамо в переміщеннях шляхом розкладу шуканого розв'язку у вигляді тригонометричних рядів з наступною побудовою матриці типу Гріна за допомогою врахування як граничних умов жорсткого затиснення країв пластин, так і умов з'єднання пластин одна з одною.

Введення для кожної пластини власної прямокутної декартової системи координат так, як вказано на рисунку 1, дозволяє записати кожну фізичну характеристику пластин та зв'язок між ними.

Модель пружної рівноваги кожної із пари пластин, з яких складається конструкція, описується системою диференціальних рівнянь у переміщеннях [1–2]

$$\Delta U_n + \frac{\lambda_n + \mu_n}{\mu_n} \frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{\partial U_n}{\partial x_n} + \frac{\partial V_n}{\partial y_n}\right] = X_n;$$

$$\Delta V_n + \frac{\lambda_n + \mu_n}{\mu_n} \frac{\partial}{\partial y_n}\left[\frac{\partial U_n}{\partial x_n} + \frac{\partial V_n}{\partial y_n}\right] = Y_n;$$

$$\Delta\Delta W_n = Z_n. \qquad (1)$$

Тут $U_n = U_n(x_n, y_n)$, $V_n = V_n(x_n, y_n)$, $W_n = W_n(x_n, y_n)$, – проекції вектора переміщень $\Psi_n(x_n, y_n)$, на відповідні осі декартової системи координат кожної пластини,

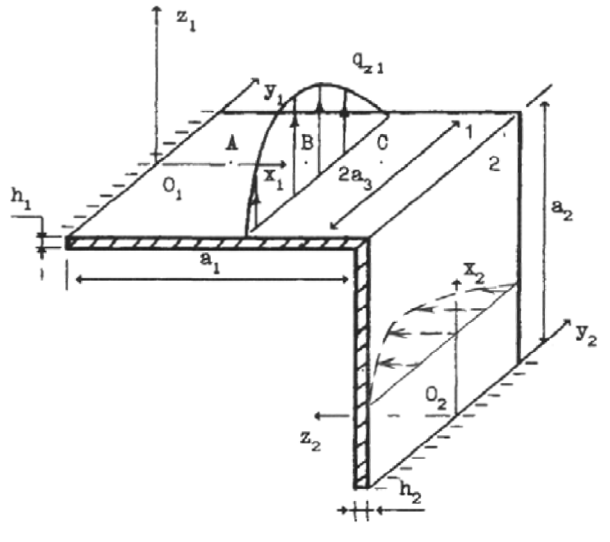

Рис. 1. Складена конструкція з двох пластин, з'єднаних під довільним кутом

а $X_n = \frac{12(\sigma_n^2 - 1)}{E_n h_n^3} q_{nx}$, $Y_n = \frac{12(\sigma_n^2 - 1)}{E_n h_n^3} q_{ny}$, $Z_n = \frac{12(1 - \sigma_n^2)}{E_n h_n^3} q_{nz}$ – праві частини системи рівнянь, що враховують інтенсивність зовнішнього поверхневого навантаження та фізичні характеристики пластини, компоненти інтенсивності навантаження q_{nx}, q_{ny}, q_{nz}, E_n – модуль Юнга, h_n – товщина пластин, σ_n – коефіцієнт Пуассона, λ_n, μ_n – коефіцієнти Ламе, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}$ – диференціальний оператор Лапласа. В записаних формулах і далі $n = 1{,}2$ і позначає номер пластинки у складеній конструкції, яка досліджується.

Крайові умови жорстко затиснених країв, де відсутні прогини і неможливий поворот крайового перерізу відносно осі ординат, мають вигляд

$$U_n\big|_{X_n=0} = 0, \quad W_n\big|_{X_n=0} = 0,$$
$$V_n\big|_{X_n=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial W_n}{\partial x_n}\right|_{X_n=0} = 0. \tag{2}$$

Умови з'єднання пластин на межі спільного ребра можуть бути представлені у вигляді

$$W_1\big|_{x_1=a_1} = \left(U_2 \sin\alpha + W_2 \cos\alpha\right)\big|_{x_2=a_2}, \quad V_1\big|_{x_1=a_1} = V_2\big|_{x_2=a_2}$$
$$U_1\big|_{x_1=a_1} = \left(U_2 \cos\alpha - W_2 \sin\alpha\right)\big|_{x_2=a_2}, \quad \left.\frac{\partial W_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=a_1} = \left.\frac{\partial W_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=a_2}$$
$$Q_{1x}\big|_{x_1=a_1} = \left(T_{2x} \sin\alpha + Q_{2x} \cos\alpha\right)\big|_{x_2=a_2},$$
$$T_{1x}\big|_{x_1=a_1} = \left(T_{2x} \cos\alpha - Q_{2x} \sin\alpha\right)\big|_{x_2=a_2},$$
$$S_{1xy}\big|_{x_1=a_1} = S_{2xy}\big|_{x_2=a_2}, \quad M_{2x}\big|_{x_2=a_2} = M_{1x}\big|_{x_1=a_1},$$

де Q_{nx} – поперечні сили відносно осі абсцис, T_{nx} – розтягувальні сили, які діють вздовж осі абсцис, S_{nxy} – зсувні зусилля у серединних площинах пластин, M_{nx} – згинальні моменти відносно осі абсцис.

Причому, їх вирази через похідні вектора зміщень мають вигляд [3–4]

$$T_{nx} = \frac{E_n h_n}{1 - \sigma_n^2}\left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n} + \sigma_n \frac{\partial V_n}{\partial y_n}\right),$$
$$Q_{nx} = -\frac{E_n h_n^3}{12\left(1 - \sigma_n^2\right)} \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta W_n,$$
$$S_{nxy} = \frac{E_n h_n}{2\left(1 + \sigma_n\right)}\left(\frac{\partial U_n}{\partial y_n} + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}\right),$$
$$M_{nx} = -\frac{E_n h_n^3}{12\left(1 - \sigma_n^2\right)}\left(\frac{\partial^2 W_n}{\partial x_n^2} + \sigma_n \frac{\partial^2 W_n}{\partial y_n^2}\right). \tag{4}$$

Теорія і аналіз отриманих результатів

Розклад кожної функції U_n, V_n, W_n і правих частин відповідно X_n, Y_n, Z_n системи (1) в тригонометричні ряди Фур'є дозволяє записати її розв'язок у такому вигляді

$$U_n\left(x_n, y_n\right) = \sum_m U_{nm}\left(x_n\right) \cos\left(m y_n\right),$$
$$V_n\left(x_n, y_n\right) = \sum_m V_{nm}\left(x_n\right) \sin\left(m y_n\right),$$
$$W_n\left(x_n, y_n\right) = \sum_m W_{nm}\left(x_n\right) \cos\left(m y_n\right). \tag{5}$$

Внаслідок підстановки (5) і відповідних розкладів для складових векторів зовнішнього поверхневого навантаження у систему (1), одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^4 W_{nm}}{dx_n^4} - 2m^2 \frac{d^2 W_{nm}}{dx_n^2} + m^4 W_{nm} = Z_{nm},$$
$$\left(1 + q_n\right)\frac{d^2 U_{nm}}{dx_n^2} - m^2 U_{nm} + q_n m \frac{dV_{nm}}{dx_n} = X_{nm},$$
$$\frac{d^2 V_{nm}}{dx_n^2} - m^2\left(1 + q_n\right)V_{nm} - q_n m \frac{dU_{nm}}{dx_n} = Y_{nm}. \tag{6}$$

Крайові умови жорстко затиснених країв (2) після перетворень приймуть вигляд

$$U_{nm}\big|_{X_n=0} = 0, \quad W_{nm}\big|_{X_n=0} = 0,$$
$$V_{nm}\big|_{X_n=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial W_{nm}}{\partial x_n}\right|_{X_n=0} = 0. \tag{7}$$

а умови з'єднання пластин (3) – набудуть такого вигляду

$$W_{1m}\big|_{x_1=a_1} = \left(U_{2m} \sin\alpha + W_{2m} \cos\alpha\right)\big|_{x_2=a_2},$$
$$U_{1m}\big|_{x_1=a_1} = \left(U_{2m} \cos\alpha - W_{2m} \sin\alpha\right)\big|_{x_2=a_2},$$
$$V_{1m}\big|_{x_1=a_1} = V_{2m}\big|_{x_2=a_2}, \quad \left.\frac{\partial W_{1m}}{\partial x_1}\right|_{x_1=a_1} = \left.\frac{\partial W_{2m}}{\partial x_2}\right|_{x_2=a_2},$$
$$\left.\frac{h_1^2}{12}\left(\frac{d^3 W_{1m}}{dx_1^3} - m^2 \frac{dW_{1m}}{dx_1}\right)\right|_{x_1=a_1} = \left(\frac{dU_{2m}}{dx_2} + \frac{q_2 - 1}{2q_2} m V_{2m}\right)\cdot \sin\alpha -$$
$$\left. - \frac{h_2^2}{12}\left(\frac{d^3 W_{2m}}{dx_2^3} - m^2 \frac{dW_{2m}}{dx_2}\right)\cdot \cos\alpha \right|_{x_2=a_2},$$
$$\left.\left(\frac{dU_{1m}}{dx_1} + \frac{q_1 - 1}{2q_1} m V_{1m}\right)\right|_{x_1=a_1} = \left(\frac{dU_{2m}}{dx_2} + \frac{q_2 - 1}{2q_2} m V_{2m}\right)\cdot \cos\alpha +$$
$$\left. + \frac{h_2^2}{12}\left(\frac{d^3 W_{2m}}{dx_2^3} - m^2 \frac{dW_{2m}}{dx_2}\right)\cdot \sin\alpha \right|_{x_2=a_2},$$
$$\left.\left(\frac{dV_{1m}}{dx_1} - m U_{1m}\right)\right|_{x_1=a_1} = \left.\left(\frac{dV_{2m}}{dx_2} - m U_{2m}\right)\right|_{x_2=a_2},$$
$$\left.\left(\frac{d^2 W_{1m}}{dx_1^2} - \frac{q_1 - 1}{2q_1} m^2 W_{1m}\right)\right|_{x_1=a_1} -$$
$$- \left.\left(\frac{d^2 W_{2m}}{dx_2^2} - \frac{q_2 - 1}{2q_2} m^2 W_{2m}\right)\right|_{x_2=a_2} = 0. \tag{8}$$

Систему звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (6) будемо розв'язувати методом варіації довільних сталих звідки одержимо наступну систему рівнянь з коефіцієнтами $C_{1i}(x_1)$, ($i=\overline{1,8}$), що є невідомими функціями змінної x_1 для першоїпластини:

$$\begin{aligned} W_{1m}(x_1) &= C_{11}(x_1)W_{1m}^{(1)}(x_1)+C_{12}(x_1)W_{1m}^{(2)}+ \\ &+C_{13}(x_1)W_{1m}^{(3)}(x_1)+C_{14}(x_1)W_{1m}^{(4)}(x_1), \\ U_{1m}(x_1) &= C_{15}(x_1)U_{1m}^{(1)}(x_1)+C_{16}(x_1)U_{1m}^{(2)}(x_1)+ \\ &+C_{17}(x_1)U_{1m}^{(3)}(x_1)+C_{18}(x_1)U_{1m}^{(4)}(x_1), \\ V_{1m}(x_1) &= C_{15}(x_1)V_{1m}^{(1)}(x_1)+C_{16}(x_1)V_{1m}^{(2)}(x_1)+ \\ &+C_{17}(x_1)V_{1m}^{(3)}(x_1)+C_{18}(x_1)V_{1m}^{(4)}(x_1). \end{aligned} \tag{9}$$

де

$$\begin{gathered} W_{1m}^{(1)}(x_1)=ch(mx_1),\ W_{1m}^{(2)}(x_1)=sh(mx_1), \\ W_{1m}^{(3)}(x_1)=x_1ch(mx_1),\ U_{1m}^{(1)}(x_1)=ch(mx_1), \\ U_{1m}^{(2)}(x_1)=sh(mx_1),\ U_{1m}^{(3)}(x_1)=x_1ch(mx_1), \\ U_{1m}^{(4)}(x_1)=x_1sh(mx_1),\ W_{1m}^{(4)}(x_1)=x_1sh(mx_1), \\ V_{1m}^{(1)}(x_1)=-sh(mx_1),\ V_{1m}^{(2)}(x_1)=-ch(mx_1), \\ V_{1m}^{(3)}(x_1)=-\frac{2+q_1}{q_1m}ch(mx_1)-x_1sh(mx_1), \\ V_{1m}^{(4)}(x_1)=-\frac{2+q_1}{q_1m}sh(mx_1)-x_1ch(mx_1). \end{gathered}$$

При цьому розв'язок системи (1) отримаємо в виді

$$\begin{aligned} W_{nm}(x_n) &= \gamma_{nm}^2W_{nm}^{(2)}(x_n)+\gamma_{nm}^3W_{nm}^{(3)}(x_n)+\gamma_{nm}^4W_{nm}^{(4)}(x_n)+ \\ &+\int_0^{x_n}Z_{nm}(\xi)\frac{sh\sigma-\sigma\cdot ch\sigma}{2m^3}d\xi, \\ U_{nm}(x_n) &= \gamma_{nm}^6U_{nm}^{(2)}(x_n)+\gamma_{nm}^7U_{nm}^{(3)}(x_n)+\gamma_{nm}^8U_{nm}^{(4)}(x_n)+ \\ &+\int_0^{x_n}X_{nm}(\xi)\frac{q_n\sigma\cdot ch\sigma-(2+q_n)sh\sigma}{2m(1+q_n)}d\xi- \\ &-\int_0^{x_n}Y_{nm}(\xi)\frac{q_n}{2(1+q_n)}(\xi-x_n)\cdot sh\sigma\, d\xi, \\ V_{nm}(x_n) &= \gamma_{nm}^6V_{nm}^{(2)}(x_n)+\gamma_{nm}^7V_{nm}^{(3)}(x_n)+\gamma_{nm}^8V_{nm}^{(4)}(x_n)+ \\ &+\int_0^{x_n}X_{nm}(\xi)\frac{q_n}{2(1+q_n)}(\xi-x_n)\cdot sh\sigma\, d\xi- \\ &-\int_0^{x_n}Y_{nm}(\xi)\frac{q_n\sigma\cdot ch\sigma+(2+q_n)sh\sigma}{2m(1+q_n)}d\xi. \end{aligned} \tag{11}$$

Причому $\sigma=(m(\xi-x_n))$.

Щоб побудувати аналітичний розв'язок задачі пружної рівноваги потрібно відшукати невідомі сталі коефіцієнти $\gamma_{nm}^2\cdot\gamma_{nm}^4,\gamma_{nm}^7,\gamma_{nm}^8$ $n=1,2$, використовуючи умови з'єднання пластин (7), (8).

З умов жорсткого затиснення кожної пластини випливає, що деякі коефіцієнти системи (11) пов'язані залежністю $\gamma_{1m}^3=-m\gamma_{1m}^2$, $\gamma_{2m}^3=-m\gamma_{2m}^2$, $\gamma_{1m}^6=-\frac{2+q_1}{q_1m}\gamma_{1m}^7$ і $\gamma_{2m}^6=-\frac{2+q_1}{q_1m}\gamma_{2m}^7$. Виконавши потрібні перегрупування доданків відносно функцій $X_{nm}(\xi), Y_{nm}(\xi), Z_{nm}(\xi)$, можна отримати розв'язок системи диференціальних рівнянь (1) у вигляді

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}(x_n) &= \int_0^{a_1}\omega_{nm}(x_n,\xi)\Phi_{nm}(\xi)d\xi+ \\ &+\int_0^{a_2}\theta_{nm}(x_n,\xi)\Phi_{nm}(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

де $\omega_{nm}=\left(\omega_{nm}^{ij}\right)_{i,j=1,2,3}$ $\theta_{nm}=\left(\theta_{nm}^{ij}\right)_{i,j=1,2,3}$,

$$\Psi_{nm}(x_n)=\begin{bmatrix} U_{nm}(x_n) \\ V_{nm}(x_n) \\ W_{nm}(x_n) \end{bmatrix}, \qquad \Phi_{nm}(\xi)=\begin{bmatrix} X_{nm}(\xi) \\ Y_{nm}(\xi) \\ Z_{nm}(\xi) \end{bmatrix}.$$

Підставляючи отримані вирази в формули (5) остаточний розв'язок задачі про статичне деформування складеної конструкції в умовах нормального навантаження в аналітичному вигляді

$$\begin{aligned} &\Psi_n(x_n,y_n)= \\ &=\int_{-a_3}^{a_3}\int_0^{a_1}\Omega_n(x_n,y_n,\xi,\eta)\,\Phi_n(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\ + \\ &+\int_{-a_3}^{a_3}\int_0^{a_2}\Theta_n(x_n,y_n,\xi,\eta)\,\Phi_n(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\ , \end{aligned} \tag{12}$$

де $\Omega_n(x_n,y_n,\xi,\eta), \Theta_n(x_n,y_n,\xi,\eta)$ – шукані матриці типу Гріна.

Поданий підхід до побудови матриць типу Гріна дозволяє отримувати значення необхідних компонент з високою точністю.

Результати розрахунку основних характеристик деформування розглянутого вище з'єднання двох пластин продемонстровані в графічному вигляді для двох варіантів зосередженого нормального зовнішнього навантаження, локалізованого у точках з координатами A_1 (2,325; 0) на першій пластині, A_2 (0,775; 0) на другій пластині (перший варіант навантаження); B_1 (1,55; 0) на першій пластині, B_2 (1,55; 0) на другій пластині (другий варіант навантаження). Ці графіки дозволяють спостерігати вплив з'єднувального ребра складеної конструкції на її деформівність при різних віддаленнях прикладеного навантаження від ребра. Цікаво відзначити, що максимуми нормальних прогинів не співпадають з точками прикладення навантаження, особливо у випадку B.

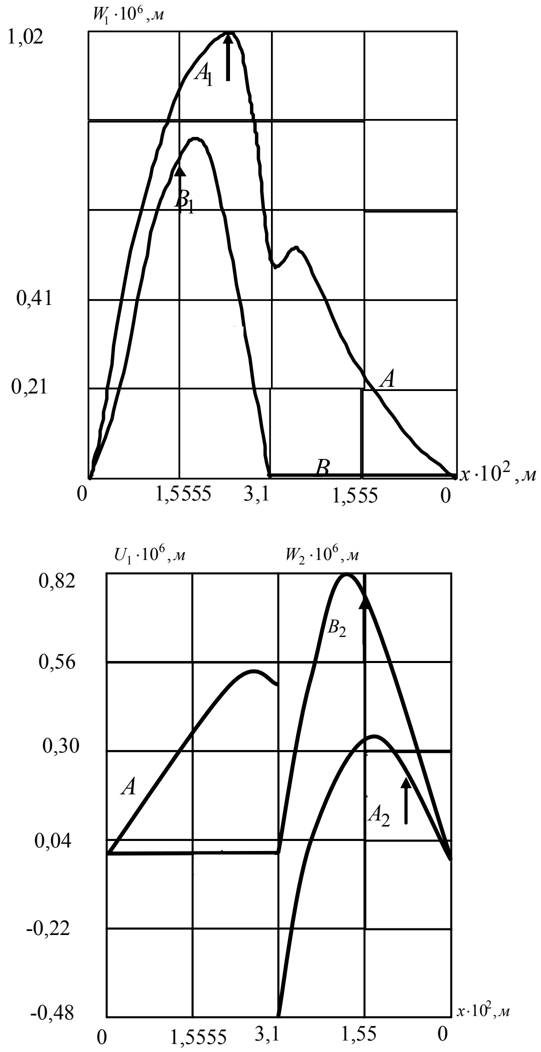

Рис. 2. Деформований стан складеної конструкції при локалізації навантаження в точках А і В

При розрахунках було прийнято: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0{,}25$; $h = 0{,}01$ м; $a_1 = a_2 = 0{,}031$ м; $m = 1$; $q_{1z} = q_{2z} = 10^3$ МПа, $q_{1x} = q_{2x} = q_{1y} = q_{2y} = 0$, $\alpha = 90^\circ$.

Результати розрахунку основних характеристик деформування складеного тіла з двох пластин, жорстко затиснених на краях, з'єднаних під розгорнутим кутом при нормальному поверхневому навантаженні за запропонованим методом порівнювалися з результатами, отриманими при розв'язанні задачі Леві для пластини, два протилежних боки якої шарнірно оперті, а два інші – вільні [6].

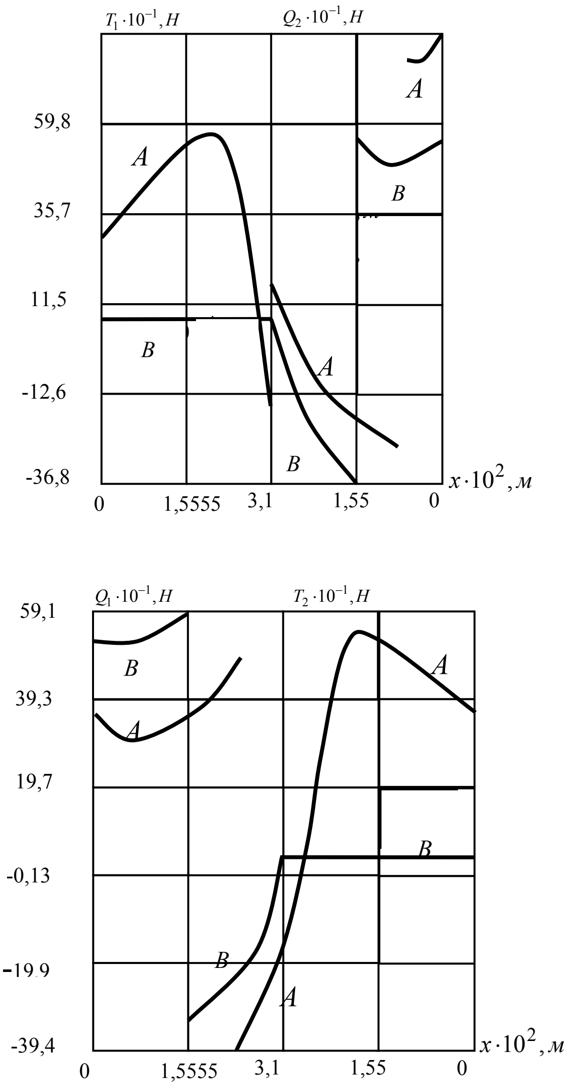

Рис. 3. Напружений стан складеної конструкції при локалізації навантаження в точках А і В

Висновки

У роботі сформульовано і розв'язано статичну задачу про напружено-деформований стан складеної конструкції з двох прямокутних пластин,з'єднаних під довільним кутом, жорстко затиснутих на краях методом, який було запропоновано в роботі [3]. Показано, що розроблений метод дозволяє ефективно розв'язувати задачі про напружено-деформований стан складених конструкцій з пластин, які з'єднані під довільним кутом і жорстко затиснуті на інших краях. У подальшому розглянуту задачу планується узагальнити на випадок ускладненого навантаження конструкції.

Список літератури

1. Биргер М. А. Прочность, устойчивость, колебания : в 3-х т. / М. А. Биргер, Я. Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 832 с.

2. Гавеля С. П. Матрица типа Грина задачи об упругом деформировании составной конструкции из двух пластин / С. П. Гавеля, С. А. Левчук, Н. В. Чирка. – Запорожье,1992. – 15 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 17.12.92, №2002 – Ук92.
3. Левчук С. А. Матриці Гріна рівнянь та систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл : діс. ... кандидата фіз.-мат. наук : 01.02.04 / Левчук Сергій Анатолійович. – Запоріжжя : ЗДУ, 2002. – 150 с.
4. Левчук С. А. Моделювання симетричного напружено–деформованого стану складеного тіла з двох пластин, з'єднаних під прямим кутом за допомогою матриць типу Гріна / С. А. Левчук // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2010. – № 2. – С. 116–120.
5. Левчук С. А. Моделювання статичного деформування складеної конструкції з двох пластин за допомогою матриць типу Гріна / С. А. Левчук, Л. О. Рак // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 19. – С. 212–219.
6. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль – М. : Высшая школа, 1982 – 264 с.

Одержано 18.06.2014

Рак Л.А. Моделирование деформированного состояния тела, состоящего из двух пластин, соединенных под произвольным углом с помощью матриц типа Грина

Работа посвящена решению задачи про напряженно-деформированное состояние составной конструкции из двух пластин, соединенных между собой под произвольным углом и жестко защемленными краями в перемещениях и дальнейшем построении матриц типа Грина, с учетом граничных условий и условий соединения пластин.

Ключевые слова: *напряженно-деформированное состояние, составная конструкция из двух пластин, соединенных под произвольным углом, решение в перемещениях, матрица типа Грина.*

Rak L. Modeling of static deformation of the complicated constraction with two plate with help the Green's matrix

The work is devoted to research of strainly-deformed state of the complicated construction. Construction is made of two plate. Plates are united under an arbitrary angle. Solution is given in the form of trigonometry rows. Green's matrix is built for this problem.

Key words: *strainly-deformed state, complicated construction with two plate, solved in displaces, Green's matrix.*