

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В работе представлено решение прикладной задачи теории пластичности по определению напряженного состояния при осадке полой цилиндрической заготовки полуобратным методом. Для аналитического решения данной задачи были определены граничные условия исходя из общепринятых теоретических данных. Получены величины и характер распределения относительных контактных нормальных и касательных напряжений.

Ключевые слова: теория пластичности, граничные условия, напряжения, коэффициент трения, фактор формы.

Введение

При аналитическом решении задач механики деформированного тела возникает необходимость определения постоянных или функций интегрирования, которые появляются в результате решения дифференциальных уравнений. Определяются они из граничных условий. Однако в прикладной теории пластичности граничные условия также неизвестны. Используют либо экспериментальные данные [1], либо задавая закон контактного трения – данные полученные теоретически [2]. Такой метод решения задач механики деформированного твердого тела называют полуобратным. В работах [3–5] предложен метод решения плоской осесимметричной задачи теории пластичности с использованием гармонических функций.

Постановка задачи

Рассматривается плоская осесимметричная задача теории пластичности. Система уравнений в данном случае имеет вид [3–5]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_z}{r} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0;$$

$$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4k^2; \quad \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2\tau_{rz}} = \frac{\xi_r - \xi_z}{\gamma_{rz}};$$

$$\xi_r + \xi_z = 0; \quad \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial z \partial r}. \quad (1)$$

Граничные условия:

$$\tau_n = -k \cdot \sin(A\Phi - 2\alpha). \quad (2)$$

В систему входят два дифференциальных уравнения равновесия, условие пластичности Мизеса, физическое уравнение связи напряжений и скоростей де-

формаций, условие постоянства объема, дифференциальное уравнение неразрывности скоростей деформаций. Граничные условия на контакте заданы с использованием тригонометрических зависимостей [3].

Решение задачи

Решение системы уравнений (1) с использованием граничных условий (2) приведено в работах [3–6].

$$\sigma_r = - \left[\frac{K_0}{\cos A\Phi_0} \cdot \frac{r}{\rho} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_0) + \frac{K_1}{\cos A\Phi_1} \cdot \frac{R}{\rho} \cdot \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_1) \right] \cdot \cos A\Phi;$$

$$\sigma_z = -3 \left[\frac{K_0}{\cos A\Phi_0} \cdot \frac{r}{\rho} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_0) + \frac{K_1}{\cos A\Phi_1} \cdot \frac{R}{\rho} \cdot \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_1) \right] \cdot \cos A\Phi;$$

$$\tau_{zr} = \left[\frac{K_0}{\cos A\Phi_0} \cdot \frac{r}{\rho} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_0) + \frac{K_1}{\cos A\Phi_1} \cdot \frac{R}{\rho} \cdot \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_1) \right] \cdot \sin A\Phi;$$

при $\theta_r = -A\Phi_z$; $\theta_z = A\Phi_r$,

$$\theta_{rr} + \theta_{zz} = 0, \quad A\Phi_{rr} + A\Phi_{zz} = 0. \quad (4)$$

Из последующих соотношений следует, что функции θ и $A\Phi$ являются гармоническими.

Рассмотрим решение задачи в напряжениях. Используя соотношения (4) можно получить для симметричного нагружения

$$A\Phi = (AA'_6 + AA''_6)(\rho - r_n) \cdot z,$$

$$\theta = (AA'_6 + AA''_6) \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} - \rho \cdot r_n \right) + (AA'_6 + AA''_6) \cdot \frac{z^2}{2}.$$

Запишем напряжение σ_z :

$$\sigma_z = -3 \frac{K_0}{\cos A\Phi_0} \left[\frac{r}{\rho} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_0) + \frac{R}{\rho} \cdot \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_1) \right] \cdot \cos A\Phi + K_0. \quad (5)$$

Запишем максимальные значения

$$\theta - \theta_0 = (AA'_6 + AA''_6) \frac{1}{8} (R - r)^2;$$

$$\theta - \theta_1 = (AA'_6 + AA''_6) \frac{1}{8} (R + r)^2$$

при $\rho = \frac{R+r}{2}, r_n = \frac{R-r}{2}$.

Тогда

$$\sigma_{z \max} = -3 \frac{K_0}{\cos A\Phi_0} \cdot \exp \left[\frac{1}{8} 2AA_6 (R - r)^2 \right] \left(\frac{2}{(R^2 - r^2)(R + r)} \right).$$

$$\cdot \left\{ r \left[\frac{4R^2 - R^2 - 2Rr - r^2}{4} \right] + R \left[\frac{R^2 + 2Rr + r^2 - 4r^2}{4} \right] \right\} + K_0.$$

В относительных величинах:

$$\frac{\sigma_{z \max}}{2K_0} = -\frac{3}{2 \cos A\Phi_0} \cdot \exp \left[\frac{1}{4} AA_6 (R - r)^2 \right] \cdot \frac{1}{2(R^2 - r^2)(R + r)} \left[R^3 - r^3 + 5Rr(R - r) \right] + \frac{1}{2}.$$

Ориентировочно среднее контактное удельное давление:

$$\frac{P_{cp}}{\sigma_T} = \frac{\sigma_{z \max}}{4K_0} = -\frac{3}{4 \cos A\Phi_0} \cdot \exp \left[\frac{1}{4} AA_6 (R - r)^2 \right] \cdot \frac{1}{2(R^2 - r^2)(R + r)} \left[R^3 - r^3 + 5Rr(R - r) \right] + \frac{1}{4}. \quad (6)$$

Для численного подсчета напряжений необходимо знать постоянную AA_6 . В работах [2], [7] показана графическая зависимость среднего коэффициента подпора от фактора формы l/h и коэффициента трения.

Очаг деформации разбивается на несколько зон, каждая из которых привязывает тот или иной закон трения.

Составная эпюра нормальных и касательных напряжений представлена на (рис. 1) По краям работает закон Амантона, в середине закон трения Зибеля и искусственно принятый переходной участок.

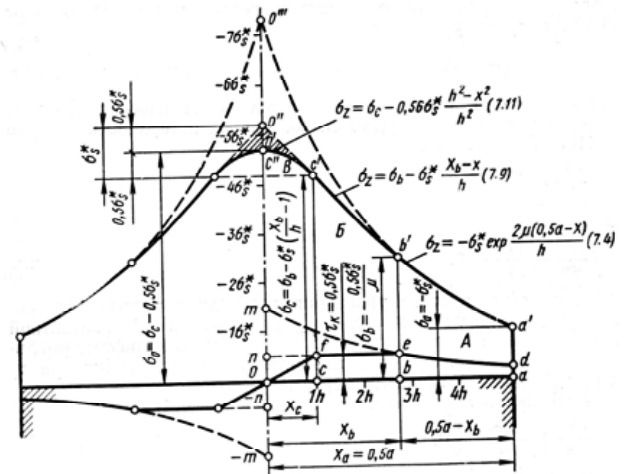


Рис. 1. Составная эпюра нормальных и касательных напряжений [7]

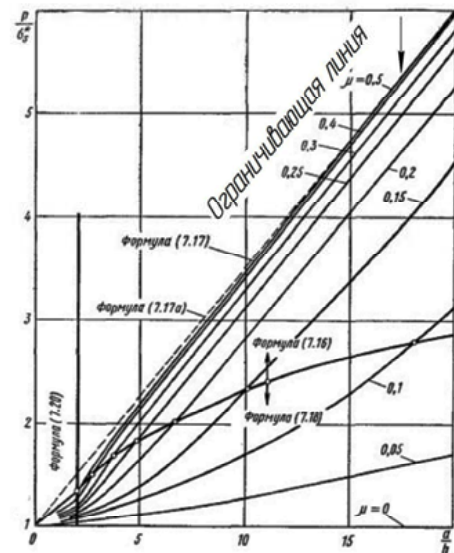


Рис. 2. Относительные средние контактные напряжения [7]

Для этой сложной композиции были подсчитаны относительные средние контактные напряжения представленные на (рис. 2) Ограничивающая кривая может быть описана следующим выражением

$$\frac{P_{cp}}{\sigma_T} = 0,25 \frac{l}{h} + 1,$$

где P_{cp} – среднее контактное напряжение, σ_T – предел текучести, $\frac{P_{cp}}{\sigma_T}$ – средний коэффициент подпора.

Если коэффициент трения не превышает 0,5 тогда можно записать

$$\frac{P}{\sigma_T^*} = f(1 - f) \frac{l}{h} + 1. \quad (7)$$

Вот эти данные рассматриваются как граничные условия нашей задачи.

Приравниваем (6) и (7):

$$f(1-f)\frac{l}{h} + 1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2 \cos A\Phi_0 (R^2 - r^2)(R+r)} \cdot \exp\left[\frac{1}{4} AA_6 (R-r)^2\right] \cdot \left[(R^3 - r^3) + 5Rr(R-r) \right] - \frac{1}{4}.$$

Логарифмируя и преобразовывая получим:

$$AA_6 = \frac{4}{(R-r)^2} \cdot \ln \frac{\left[(R^3 - r^3) + Rr(R-r) \right] \cdot \frac{4}{3} \left[f(1-f) \cdot \frac{l}{h} + 1.25 \right] \cdot 2 \cos A\Phi_0}{(R^3 - r^3) + 5Rr(R-r)}. \quad (8)$$

Используя выражения (5) и (8) были подсчитаны относительные контактные напряжения $\frac{\sigma_z}{2k_0}$ и $\frac{\tau_{\rho z}}{k_0}$ по длине очага деформации в зависимости от фактора формы l/h и коэффициента трения f рис. 3, 4.

Анализируя выше приведенные графики, можно сделать вывод о том, что с увеличением фактора формы и коэффициента трения увеличивается значение относительных контактных напряжений, что имеет место в реальных процессах при симметричном нагружении. Контактные напряжения качественно и количественно соответствуют общепринятым положениям механики деформированного тела. Эпюры нормальных напряжений соответствуют результатам работ [2], [7].

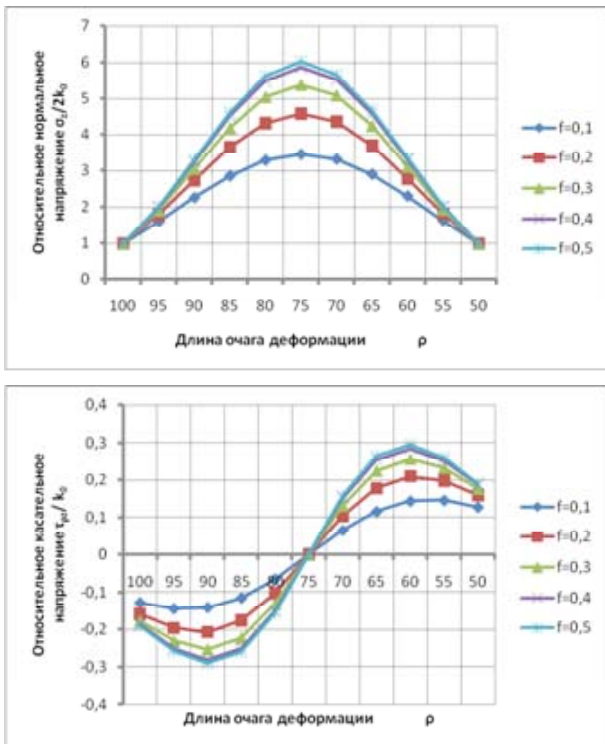


Рис. 3. Распределение нормальных и касательных контактных напряжений при факторе формы $l/h = 8$ и коэффициенте трения $f = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$

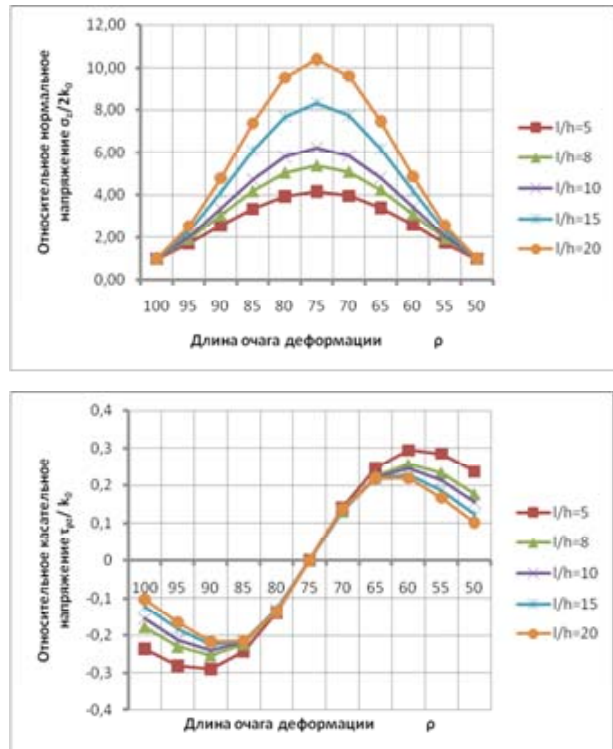


Рис. 4. Распределение нормальных и касательных контактных напряжений при коэффициенте трения $f = 0,3$ и факторе формы $l/h = 5, 8, 10, 15, 20$

Представляет интерес сопоставить тестовые расчеты полученные по нашим решениям с тем комбинированным решением представленных в работах Унксова, Сторожева, Попова.

В нашем случае напряжение во всем очаге деформации описывается единой формулой, в случае указанных авторов, это реализуется при разных законах трения с разбивкой на три зоны, включая зону перехода.

Комбинированная эпюра касательных напряжений напоминает синусоиду, а комбинированная эпюра нормальных напряжений экспоненциальную тригонометрическую зависимость которая получена нами.

В итоге следует отметить, что полученные величины и характер распределения относительных контактных нормальных и касательных напряжений в зависимости от таких параметров пластической деформации как коэффициент контактного трения и фактора формы, соответствуют общепринятым положениям механики деформированного твердого тела.

Задаваясь известными граничными условиями для линейной задачи, была решена прикладная плоская задача теории пластичности в цилиндрических координатах.

Результаты работы [7], в данном случае, используются в виде граничных условий для определения постоянных в гармонических функциях, что позволяет определить область допустимых значений предложенного решения.

Выводы

1. Решение задач теории пластичности полуобратным методом предполагает использование известных граничных условий .
2. Определена область допустимых значений в решении, которые позволяют качественно и количественно верно получить распределение напряжений в области пластического течения.
3. Используя граничные условия для линейной задачи, было получено решение плоской осесимметричной задачи теории пластичности в цилиндрических координатах.

Список литературы

1. Тарновский И. Я. Теория обработки металлов давлением / Тарновский И. Я., Поздеев А. А., Ганаго О. А. – М. : Metallurgizdat, 1963. – 673 с.
2. Унксов Е. П. Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением / Унксов Е. П. – М. : Mashgiz, 1955. – 230 с.
3. Чигиринський В. В. Розробка математичної моделі радіального тиску пластичного середовища при осадці по-

лих тіл обертання / В. В. Чигиринський, А. Ю. Матюхін, В. В. Падалка // Вісник національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». – 2011. – С. 46–50.

4. Чигиринский В. В. Исследование напряженного состояния при осадке тел вращения в условиях внешней радиальной загрузки / В. В. Чигиринский, А. Ю. Матюхин // Вестник двигателестроения. – 2012. – № 1. – С. 169–173.
5. Чигиринский В. В. Влияние радиальных нагрузок при осадке толстостенной трубы на изменение напряженного состояния металла / В. В. Чигиринский, А. Ю. Матюхин // Обработка материалов давлением : сб. трудов ДонНГМА, 2013. – № 1. – С. 58–64.
6. Современное производство колес автотранспортных средств и сельскохозяйственной техники : монография / [Чигиринский В. В., Мазур В. Л., Беликов С. Б. и др.]. – Днепропетровск РИА «Днепр-VAL», 2010. – 309 с.
7. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением / Сторожев М. В., Попов Е. А. – М. : Машиностроение, 1977. – 422 с.

Одержано 16.06.2014

Чигиринський В.В., Матюхін А.Ю. Граничні умови при рішенні плоскої задачі теорії пластичності в циліндричних координатах

У роботі наводиться розв’язання прикладної задачі теорії пластичності з визначення напруженого стану при осаджуванні порожнистої циліндричної деталі напівзворотнім методом. Для аналітичного розв’язання цієї задачі були визначені граничні умови, виходячи з загальноприйнятих теоретичних даних. Отримані величини та характер розподілу відносних контактних нормальних та дотичних напружень.

Ключові слова: *теорія пластичності, граничні умови, напруження, коефіцієнт тертя, фактор форми.*

Chygyrynskyi V., Matukhin A. The boundary conditions at the plane problem solution of the theory of plasticity in cylindrical coordinates

The solution of applied problems of the theory of plasticity for determination of stress-strain state in the sediment of a hollow cylindrical billets half reverse method are presented. For analytic solutions of this task in the tensions have been determined boundary conditions on the basis of generally accepted theoretical data. The values and the character of the distribution of relative normal and tangential stresses were obtained.

Key words: *theory of plasticity, boundary conditions, strain, coefficient of friction, form factor.*