

УДК 539.3

Канд. техн. наук А. В. Засовенко

Запорізький національний технічний університет, м. Запоріжжя

## КОНТАКТНЕ ДЕФОРМУВАННЯ БАЛКИ КІНЦЕВОЇ ДОВЖИНИ НА ОДНОСТОРОННІЙ ІНЕРЦІЙНІЙ ОСНОВІ

*Розглядається нестационарне контактне деформування пружної шарнірно обертої балки кінцевої довжини, що лежить на односторонній інерційній основі. Прямий чисельний розв'язок засновано на використанні методу характеристик.*

**Ключові слова:** інерційна основа, пружна балка, основа типу Вінклера, метод характеристик.

Дослідження якісних закономірностей взаємодії балочних конструкцій з різними основами представляють інтерес при оцінці міцності і стійкості їх при дії нестационарних навантажень, оскільки порушення контакту при сумісній деформації не тільки кількісно, але і якісно змінює характер динамічного процесу.

Розглянемо систему кінцевої довжини, що складається з балки, і пружної односторонньої інерційної основи. Односторонній зв'язок між балкою і основою обумовлений тим, що основа чинить опір тільки втискуванню балки і не заважає їй відходу. Цей зв'язок визначає характер контактної тиску, що виникає між балкою і основою в процесі сумісного деформування, – воно не може бути негативним.

Рівняння, що моделюють деформування балки з урахуванням інерції обертання і впливу зрушення в розмірному вигляді доповнюємо рівнянням, що відповідає за реакцію основи:

$$\begin{cases} E J \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 G S \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} - \psi \right) = \rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}; \\ k^2 G S \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \rho S \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + R(x, t) - \frac{q(x, t)}{\delta}; \\ R(x, t) = 2a \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - b w_2 - m \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Тут  $E$  – модуль пружності матеріалу балки,  $G$  – модуль зрушення,  $J$  – момент інерції поперечного перетину балки,  $S$  – площа поперечного перетину балки,  $k^2$  – коефіцієнт зрушення,  $\rho$  – щільність матеріалу балки,  $\psi(x, t)$  – кут повороту нормального елемента балки,  $w_1(x, t)$  – прогинання балки,  $x$  – відстань, вимірювана уздовж вісі недеформованої балки ( $0 \leq x \leq L$ ),  $t$  – час,  $\frac{q(x, t)}{\delta}$  – розподілене навантаження,  $R(x, t)$  – реакція основи,  $w_2(x, t)$  – переміщення точок основи у

напрямку, нормальному до вісі балки;

$$a = \frac{E_0 \delta}{4(1 + \eta_0)} \int_0^H \psi^2(y) dy; \quad b = \frac{E_0 \delta}{1 - \eta_0^2} \int_0^H \psi^2(y) dy;$$

$$m = m_0 \delta \int_0^H \psi^2(y) dy; \quad E_0 = \frac{E_M}{1 - \eta_M^2}; \quad \eta_0 = \frac{\eta_M}{1 - \eta_M}.$$

Причому  $E_M$  і  $\eta_M$  – відповідно модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу основи;  $\delta$  – ширина балки;  $\psi(y)$  – функція, що характеризує розподіл переміщень у основі;  $m_0$  – щільність основи. Товщина основи  $0 < H < \infty$ .

Основою є шар, що стискається, завтовшки  $H$ , розташований на нескінченно жорсткій основі. Систему початкових та крайових умов прийемо у формі:

$$\begin{aligned} w_1(x, 0) = \frac{\partial w_1(x, 0)}{\partial t} = w_2(x, 0) = \frac{\partial w_2(x, 0)}{\partial t} = 0; \\ w_1(0, t) = w_1(l, t) = \frac{\partial w_1(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial w_1(l, t)}{\partial x} = w_2(0, t) = \\ = w_2(l, t) = 0. \end{aligned}$$

Використовуючи вже відомий зв'язок з безрозмірними змінними [1, 2], запишемо рівняння в безрозмірному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{t}^2} = F_1 \left( \psi - \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \xi} \right) \equiv f_1; \\ \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}_1}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \tilde{R}(\xi, \tilde{t}) - \tilde{q}(\xi, \tilde{t}) \delta_{i1} + \tilde{P} \equiv f_2; \\ \frac{\partial^2 \tilde{w}_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{C_3^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}_2}{\partial \tilde{t}^2} = F_2 \tilde{w}_2 - \tilde{R}(\xi, \tilde{t}) \equiv f_3. \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Тут } C_3 = \frac{c_S}{c_b}; \quad F_1 = \frac{k^2 G S L^2}{E J}; \quad F_2 = \frac{b}{2a} = \frac{2}{(1 - \eta_0)}.$$

Причому для  $C_3$  швидкість

$$c_s = \sqrt{E_M / 2m_0(1 - \eta_M^2)(1 + \eta_0)}.$$

Навантаження задаємо у вигляді:

$$\tilde{q}(\xi, \tilde{t}) = \tilde{\varphi}(\tilde{t})u(\xi), \text{ де } \tilde{\varphi}(\tilde{t}) = \tilde{t} e^{-\tilde{t}},$$

$$u(\xi) = \begin{cases} \mu & \xi \in (0,4; 0,6) \\ 0 & \xi \notin (0,4; 0,6) \end{cases}. \quad (3)$$

Розв'язання системи (2) будується чисельно на основі сітково-характеристичного методу [1, 2]. Розрахунки проводилися при наступних значеннях початкових параметрів:

$$\Delta \tilde{t} = 0,005; F_1 = 0,375; F_2 = 1,95;$$

$$C_2 = 0,312; C_3 = 0,568; \mu = 1.$$

Результати деяких розрахунків наведені на рис. 1 у вигляді розподілу прогинань балки на односторонній інерційній основі уздовж її довжини в різні моменти часу:  $\tilde{t}_1 = 0,5$ ;  $\tilde{t}_2 = 1$ ;  $\tilde{t}_3 = 1,5$ ;  $\tilde{t}_4 = 2$ . На графіках, з міркування симетрії, показані розподіли прогинань для  $0,5 < \xi < 1$ .

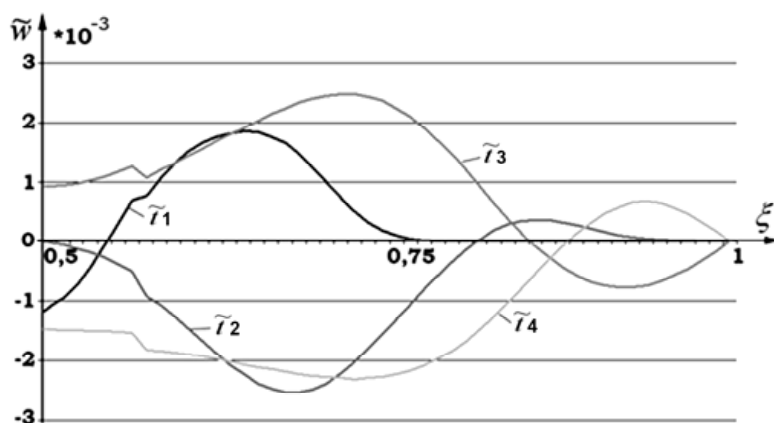


Рис. 1. Розподіл прогинань балки, що лежить на односторонній інерційній основі

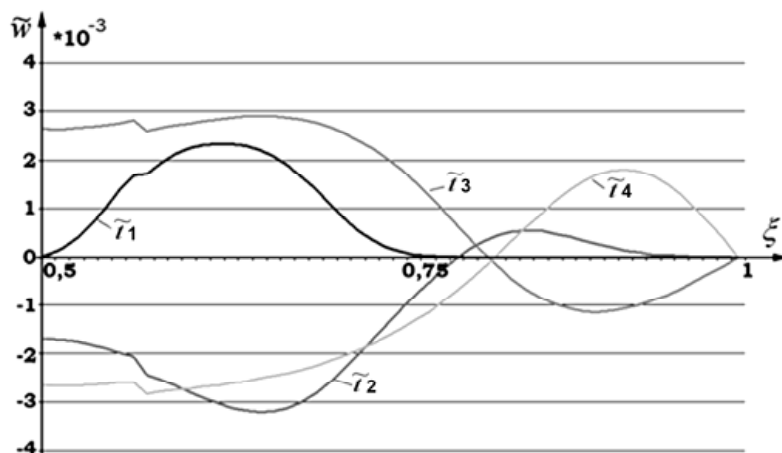


Рис. 2. Розподіл прогинань балки, що лежить на основі типу Вінклера

Для порівняння на рис. 2 наведені розподіли прогинань балки, що лежить на односторонній основі типу Вінклера, для тих же моментів часу. Розрахунки проводилися для наступних значень початкових параметрів:

$$\Delta \tilde{t} = 0,005; F_1 = 0,375;$$

$$F_2 = 325; C_2 = 0,312; \mu = 1.$$

Порівнюючи криві на двох графіках, можна бачити, що інерційна основа надає сильніший опір при втискуванні в нього балки, чим одностороння основа типу Вінклера.

Слід зазначити, що в даній задачі значення коефіцієнта постелі для односторонньої основи типу Вінклера бралось достатньо великим. Отримані результати добре узгоджуються з вже опублікованими Ю. С. Воробйовим, А. В. Колодяжним і ін. [3].

Як можна добре бачити, якісно характер прогинань для обох основ повторюється. Можна зробити висновок, що при розрахунках, для спрощення обчислень, допустимо використовувати модель односторонньої основи типу Вінклера (з великими коефіцієнтами постелі).

В цілому, для імпульсних (ступінчастих) навантажень необхідно враховувати інерцію руху основи, а у разі навантажень, що плавно змінюються (гладких), безінерційна основа типу Вінклера дає добре наближення.

**Список літератури**

1. Мастиновский Ю. В. Нестационарное деформирование упруго-вязкопластической балки / Ю. В. Мастиновский, А. В. Засовенко // Вестник двигателестроения – Запоріжжя. – 2008. – № 1. – С. 147–150.
2. Засовенко А. В. Контактное деформирование двух балок конечной длины / А. В. Засовенко Ю. В. Мастиновский // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні – Запоріжжя : ЗНТУ, 2005. – № 2. – С. 40–42.
3. Скоростное деформирование элементов конструкций / [Ю. С. Воробьев, А. В. Колодяжный, В. И. Севрюков, Е. Г. Янютин]. – К. : Наук. думка, 1989. – 192 с.

Одержано 03.06.2014

**Засовенко А.В. Контактное деформирование балки конечной длины на одностороннем инерционном основании**

*Рассматривается нестационарное контактное деформирование упругой шарнирно опертой балки конечной длины, что лежит на одностороннем инерционном основании. Прямое численное решение основано на использовании метода характеристик.*

**Ключевые слова:** инерционное основание, упругая балка, основание типа Винклера, метод характеристик.

**Zasovenko A. Contact strain of finite length beam based on one way inertia**

*The non-stationary contact deformation of elastic hinged finite length beam, lying on the single-sided inertial foundation was considered. The direct numerical solution is based on the method of characteristics.*

**Key words:** inertial basis, elastic beam, basis type of Winkler, method of characteristics.

---