

Этот пример наглядно показывает, что вблизи основания плиты решения сходится лучше.

#### Теория и анализ полученных результатов

В итоге, не на границе плиты (при  $\eta \neq 1$ ) для сходимости решения в целом необходимо выполнение равенства (6) и, для знакопостоянного ряда  $\delta_n$  – неравенства (11), для знакопеременного ряда  $\delta_n$ , где ряд  $\delta_n$  предварительно заменяется рядом из модулей  $|\delta_n|$ , – неравенства (11) для абсолютной сходимости или неравенства (16) для условной сходимости.

В целом, можно сделать вывод, что чем ближе к основанию плиты (чем меньше значение  $\eta$ ) – тем лучше сходится решение для всех функций. На границе плиты (при  $\eta = 1$ ) следует рассматривать сходимость каждой функции в отдельности.

#### Выводы

В данной статье получены необходимые и достаточные условия сходимости решения задачи о штампе методом начальных функций. Также было установлено, что решение вблизи основания плиты сходится гораздо лучше, чем на границе плиты. Это наглядно показано на примере в виде графиков зависимости значения функции в точке от количества членов ряда.

#### Перечень ссылок

1. Власов В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Физматгиз, 1960. – 491 с.
2. Овский А. Г. Моделирование схемы решения трехмерной задачи теории упругости в системе Maple / Овский А. Г., Толоч В. А. // Гидроакустичний журнал. – 2006. – № 3. – С. 88–97.
3. Аладьев В. З. Системы компьютерной алгебры : Maple : Искусство программирования / Аладьев В. З. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2006. – 792 с.

Одержано 13.04.2010

I. I. Sabo, V. O. Tolok

## STAMP TASK SOLUTION CONVERGENCE USING THE INITIAL FUNCTIONS METHOD

*Розглядаються необхідні й достатні умови збіжності розв'язку задачі про штамп методом початкових функцій. Розглянуто збіжність кожної функції окремо й на підставі отриманих результатів зроблений висновок щодо умов і характеру збіжності розв'язку в цілому.*

**Ключові слова:** необхідні умови збіжності, достатні умови збіжності, штамп, метод початкових функцій, збіжність розв'язку.

*The necessary and sufficient convergence conditions of stamp problem initial functions solution are considered. The convergence of each function was researched separately and on the results basis the conclusions concerning conditions and nature of solutions convergence in general, are drawn.*

**Key words:** convergence necessary conditions, convergence sufficient conditions, stamp, initial functions solution, solution convergence.

УДК 539.3

Д-р техн. наук А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина

Государственная инженерная академия, г. Запорожье

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ С ПОМОЩЬЮ УТОЧНЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*При помощи метода асимптотико-группового анализа получены из трехмерных динамических уравнений теории упругости одномерные динамические уравнения продольной деформации стержня, более точные, чем известные. В частности скорость распространения фронта продольной волны в соответствии с уточненными уравнениями совпадает со скоростью трехмерной продольной волны, в то время, как в известных уравнениях она значительно меньше. Проанализирован переход от зоны вблизи трехмерного волнового фронта к квазифронту одномерной волны.*

© А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина, 2010

**Ключевые слова:** асимптотико-групповой анализ, уточненные уравнения продольной динамической деформации стержня, поперечные колебания стержня, квазифронт, классические динамические уравнения продольной деформации стержня.

Ранее в работе [1] было показано, как известные динамические уравнения продольной деформации стержня получаются из трехмерных уравнений теории упругости при помощи метода асимптотико-группового анализа. Здесь аналогичный метод используется для получения уточненных динамических уравнений продольной деформации стержня.

### 1 Вывод уравнений

В [1] уравнения продольной деформации стержня получались, как результат комбинирования известных уравнений обобщенного плоского напряженного состояния. В [2] приведены уравнения, так называемого уточненного плоского напряженного состояния, более точные, чем уравнения обобщенного плоского напряженного состояния. Комбинируя такие уравнения для плоскостей  $x_1, x_2$  и  $x_1, x_3$  приходим к следующим зависимостям искомым функций от аргументов  $x_2$  и  $x_3$ :

$$\begin{aligned} u_1^1 &= u_{1,1}^1(x_1, t), u_2^1 = x_2 u_{2,1}^1(x_1, t), u_3^1 = \\ &= x_3 u_{3,1}^1(x_1, t), \sigma_{11}^1 = \sigma_{11,1}^1(x_1, t); \\ \sigma_{22}^1 &= \sigma_{22,1}^1(x_1, t), \sigma_{22}^2 = \\ &= \frac{1}{2}(x_2)^2 \sigma_{22,1}^2(x_1, t), \sigma_{33}^1 = \sigma_{33,1}^1(x_1, t); \\ \sigma_{33}^2 &= \frac{1}{2}(x_3)^2 \sigma_{33,1}^2(x_1, t), \sigma_{12}^1 = x_2 \sigma_{12,1}^1(x_1, t); \\ \sigma_{13}^1 &= x_3 \sigma_{13,1}^1(x_1, t), \sigma_{23}^1 = x_2 x_3 \sigma_{23,1}^1(x_1, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Функции, входящие в (1), удовлетворяют уравнением:

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_{11,1}^1 + \sigma_{12,1}^1 + \sigma_{13,1}^1 - \rho \partial_t^2 u_{1,1}^1 &= 0; \\ E \partial_1 u_{1,1}^1 &= \sigma_{11,1}^1 - \nu (\sigma_{22,1}^1 + \sigma_{33,1}^1); \\ E u_{2,1}^1 &= \sigma_{22,1}^1 - \nu (\sigma_{11,1}^1 + \sigma_{33,1}^1); \\ E u_{3,1}^1 &= \sigma_{33,1}^1 - \nu (\sigma_{11,1}^1 + \sigma_{22,1}^1); \\ \partial_1 \sigma_{12,1}^1 + \sigma_{22,1}^2 + \sigma_{23,1}^1 - \rho \partial_t^2 u_{2,1}^1 &= 0; \\ \partial_1 \sigma_{13,1}^1 + \sigma_{23,1}^1 + \sigma_{33,1}^2 - \rho \partial_t^2 u_{3,1}^1 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Получилось шесть уравнений относительно одиннадцати искомым функций от  $x_1, t$ , входящих в решение (1). Для получения недостающих пяти уравнений используем граничными условиями на боковых поверхностях бруса  $-h_2 \leq x_2 \leq h_2, -h_3 \leq x_3 \leq h_3$  с осью  $x_1$  [1]. Учитывая закон парности касательных напряжений, в итоге получаем необходимые пять добавочных уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_{22,1}^1 + \frac{1}{2}(h_2)^2 \sigma_{22,1}^2 &= q_2^+, \sigma_{33,1}^1 + \frac{1}{2}(h_3)^2 \sigma_{33,1}^2 = q_3^+; \\ h_2 \sigma_{12,1}^1 &= \tau_{21}^+, h_3 \sigma_{13,1}^1 = \tau_{31}^+, h_2 \sigma_{23,1}^1 = \tau_{23}^+. \end{aligned} \quad (3)$$

Система из шести уравнений (2) и пяти уравнений (3) образует полную систему одиннадцати уравнений относительно одиннадцати неизвестных.

Подставим (3) в (2) и умножим каждое из полученных уравнений на площадь поперечного сечения  $F = 4h_2 h_3$ . Вводя новые обозначения:

$$\begin{aligned} U &= u_{1,1}^1, V = u_{2,1}^1, W = u_{3,1}^1, T = F \sigma_{11,1}^1, K_2 = F \sigma_{22,1}^1; \\ K_3 &= F \sigma_{33,1}^1, \rho_1 = F \rho, \tau_2 = 4h_3 \tau_{21}^+, \tau_3 = 4h_2 \tau_{31}^+; \\ q_2 &= \frac{2F}{(h_2)^2} q_2^+ = 8 \frac{h_3}{h_2} q_2^+, q_3 = \frac{2F}{(h_3)^2} q_3^+ = 8 \frac{h_2}{h_3} q_3^+; \\ \tau_{23} &= \frac{F}{h_2} \tau_{23}^+ = 4h_3 \tau_{23}^+, \tau_{32} = \frac{F}{h_3} \tau_{32}^+ = 4h_2 \tau_{32}^+, \end{aligned}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_1} - \rho_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -\tau_2 - \tau_3; EF \frac{\partial U}{\partial x_1} = T - \nu(K_2 + K_3); \\ EFV &= K_2 - \nu(T + K_3); EFW = K_3 - \nu(T + K_2); \\ \frac{2}{(h_2)^2} K_2 + \rho_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} + q_2 + \tau_{23}; \\ \frac{2}{(h_3)^2} K_3 + \rho_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_3}{\partial x_1} + q_3 + \tau_{32}. \end{aligned} \quad (4)$$

Найдем из второго, третьего и четвертого уравнений (4) величины  $T, K_2, K_3$  и подставим результат в первое и два последних из уравнений (4). Приводя полученный результат к безразмерному виду с помощью следующих замен:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2h_3 x, U = 2h_3 u, t = 2h_3 \sqrt{\frac{\rho_1}{B_1}} \tau, T = B_1 P; \\ K_2 &= B_1 P_2, K_3 = B_1 P_3, \tau_2 = \frac{B_1}{2h_3} p_2; \\ \tau_3 &= \frac{B_1}{2h_3} p_3, q_2 = \frac{2B_1}{(h_2)^2} r_2, q_3 = \frac{2B_1}{(h_3)^2} r_3; \\ \tau_{23} &= \frac{2B_1}{(h_2)^2} r_{23}, \tau_{32} = \frac{2B_1}{(h_3)^2} r_{32}, \end{aligned}$$

будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = -p_2 - p_3;$$

$$V + c \frac{\partial u}{\partial x} + cW + \frac{1}{8} \left( \frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = \\ = \frac{1}{8} \left( \frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial p_2}{\partial x} + r_2 + r_{23};$$

$$W + c \frac{\partial u}{\partial x} + cV + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = \frac{1}{8} \frac{\partial p_3}{\partial x} + r_3 + r_{32};$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} + cV + cW, P_2 = V + c \frac{\partial u}{\partial x} + cW,$$

$$P_3 = W + c \frac{\partial u}{\partial x} + cV. \quad (5)$$

## 2 Асимптотико-групповой анализ уравнений

Запишем первые четыре из уравнений (5) для случая отсутствия нагрузок на боковых поверхностях стержня, т.е. в однородном виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$V + c \frac{\partial u}{\partial x} + cW + \frac{1}{8} \left( \frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$W + c \frac{\partial u}{\partial x} + cV + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0, P = \frac{\partial u}{\partial x} + cV + cW. \quad (6)$$

Эти уравнения имеют более сложную структуру, чем обычные уравнения продольных колебаний стержня, поэтому подвергнем их дополнительному асимптотико-групповому анализу, что позволит лучше изучить их структуру и построить некоторые важные виды решений.

Уравнения (6) инвариантны относительно преобразований растяжения:

$$u = \delta^\gamma u^*, V = \delta^\gamma V^*, W = \delta^\gamma W^*, P = \delta^\gamma P^*.$$

Это дает возможность, при сравнении весов слагаемых уравнений между собой, не растягивать одну из искомым функций, сравнивая с ней остальные функции.

Выполним преобразования:

$$\partial_x = \delta^{\alpha_1} \partial_x^*, \partial_t = \delta^{\alpha_2} \partial_t^*, u = \delta^{\alpha_3} u^*;$$

$$V = \delta^{\alpha_4} V^*, W = W^*, P = \delta^{\alpha_5} P^*, \quad (7)$$

требуя выполнения соотношений:

$$\partial_x^* \sim 1, \partial_t^* \sim 1, u^* \sim V^* \sim W^* \sim P^*.$$

Эти преобразования дают оценку абсолютных весов для дифференциальных операторов  $\partial_x = \partial/\partial x$  и  $\partial_t = \partial/\partial t$  и относительных весов для искомым функций путем сравнения их с  $W$ .

Подстановка (7) в (6) приводит к следующей таблице показателей степени:

$$\begin{array}{l} 2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_1, 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3, 0, 2\alpha_2 + \alpha_4 \\ 0, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_4, 2\alpha_2 \\ \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_4, 0. \end{array}$$

Поочередно рассмотрим три варианта значений параметров асимптотического интегрирования  $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ .

Пусть параметры имеют вид:

$$\alpha_1 = -0,5; \alpha_2 = -0,5; \alpha_3 = -0,5; \alpha_4 = 0; \alpha_5 = -1. \quad (9)$$

Таблица показателей степени (8) будет:

$$\begin{array}{l} -1,5; -1,5; -1,5; -1,5 \\ 0, -1, 0, -1 \\ 0, -1, 0, -1 \\ -1, -1, 0, 0. \end{array}$$

Соответствующие упрощенные уравнения будут:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8} \left( \frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0, P = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (11)$$

В соответствии с (9) имеем следующие асимптотические оценки:

$$\partial_x \sim \delta^{-0,5}, \partial_t \sim \delta^{-0,5}, u \sim \delta^{-0,5} W, V \sim W, P \sim \delta^{-1} W.$$

Это означает, что полученное упрощение отвечает быстрым изменениям по аргументам  $x$  и  $\tau$ , одинаковым весам величин  $V$  и  $W$  и большим, чем  $W$  значениям  $u$  и  $P$ .

Первое из уравнений (11) является стандартным волновым уравнением. Оно отвечает распространению возмущения с безразмерной скоростью, равной единице. Однако легко увидеть, что это отвечает размерной скорости:

$$a_p = \sqrt{\frac{B_1}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}.$$

Это скорость распространения продольных волн в трехмерной упругой среде. Мы видим, что полученные одномерные динамические уравнения продольных колебаний стержней задают распространение возму-

щений с такой же скоростью, как и трехмерные уравнения теории упругости.

Второе, третье и четвертое уравнения (11) позволяют находить остальные искомые функции после нахождения из первого уравнения функции  $u$ .

Аналогично рассмотрим асимптотические оценки для таких значений  $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ :

$$\alpha_1 = 0,5, \alpha_2 = 0,5, \alpha_3 = -0,5, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0. \quad (12)$$

Тогда таблица показателей степени (8) принимает вид:

$$\begin{array}{l} 0,5; 0,5; 0,5; 0,5 \\ 0, 0, 0, 1 \\ 0, 0, 0, 1 \\ 0, 0, 0, 0. \end{array}$$

Соответствующие упрощенные уравнения будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} &= 0; \\ V + c \frac{\partial u}{\partial x} + cW &= 0, W + c \frac{\partial u}{\partial x} + cV = 0; \\ P &= \frac{\partial u}{\partial x} + cV + cW. \end{aligned} \quad (13)$$

В соответствии с (12) имеем следующие асимптотические оценки:

$$\partial_x \sim \delta^{0,5}, \partial_t \sim \delta^{0,5}, u \sim \delta^{-0,5} W, V \sim W, P \sim W.$$

Это означает медленные изменения по  $x$  и  $\tau$ ; большее чем  $W$  значение  $u$ , и значения  $V$  и  $P$  одного порядка с  $W$ .

Найдем из второго и третьего уравнений (13) величины  $V$  и  $W$ , и подставим эти результаты в первое и четвертое уравнения, получая:

$$\begin{aligned} b_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} &= 0, P = b_1^2 \frac{\partial u}{\partial x}; \\ b_1^2 &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} = \frac{a_1^2}{a_p^2}, a_1^2 = \frac{E}{\rho}. \end{aligned} \quad (14)$$

Величина  $a_1$  – это скорость распространения продольных волн в стержне по классической теории стержней. Значит – величина  $b_1$  – это безразмерная скорость распространения данных волн, отнесенная к скорости  $a_p$ . Таким образом, уравнения (14) – это классические динамические уравнения продольной деформации стержней в безразмерной форме.

И, наконец, последний вариант значений параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ :

$$\alpha_1 = 0,5, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0,5, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0.$$

Таблица показателей степени:

$$\begin{array}{l} 1,5; 0,5; 0,5; 0,5 \\ 0, 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0. \end{array}$$

Упрощенные уравнения:

$$c \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, V + cW + \frac{1}{8} \left( \frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$W + cV + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0, P = cV + cW.$$

Асимптотические оценки:

$$\partial_x \sim \delta^{0,5}, \partial_t \sim 1, u \sim \delta^{0,5} W, V \sim W, P \sim W.$$

Они соответствуют малой скорости изменения по  $x$ , средней скорости изменения по  $\tau$ , малому значению  $u$  по сравнению с  $W$ .

Второе и третье из этих уравнений – это уравнения поперечных колебаний стержня.

Мы видим, таким образом, что полученные уточненные уравнения описывают распространение фронта волны с «трехмерной» скоростью; при этом в качестве частного упрощенного случая, они содержат известные одномерные динамические уравнения. Кроме того, мы выяснили, что главным дополнительным эффектом, который учитывается уточненными уравнениями, является эффект поперечных колебаний стержня.

### 3 Прифронтальная асимптотика

Второй и третий варианты упрощения соответствуют медленным изменениям искомых функций по аргументам  $x$  и  $\tau$ . В подобных случаях уже уравнения первого приближения, т.е. непосредственно упрощенные уравнения, дают удовлетворительную точность и не нуждаются в последующих уточнениях.

В то же время первый вариант упрощения отвечает быстрым изменениям по  $x$  и  $\tau$ ; в этом случае первого приближения недостаточно, для получения достоверных результатов необходимо строить процедуру последовательных приближений. Представим искомые функции в виде рядов:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i, V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i, W = \sum_{i=1}^{\infty} W_i, P = \sum_{i=1}^{\infty} P_i. \quad (15)$$

В соответствии с таблицей показателей степени (10) члены этих рядов отвечают следующей рекуррентной системе уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + c \left( \frac{\partial V_{i-1}}{\partial x} + \frac{\partial W_{i-1}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$V_{i-1} + c \frac{\partial u_i}{\partial x} + cW_{i-1} + \frac{1}{8} \left( \frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$W_{i-1} + c \frac{\partial u_i}{\partial x} + cV_{i-1} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$P_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} + cV_{i-1} + cW_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (16)$$

Запишем решение для произвольного приближения в форме:

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{j=1}^i u_{i,j} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j-1}; \\ P_i &= \sum_{j=1}^i P_{i,j} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j-2}; \\ V_i &= \sum_{j=1}^i V_{i,j} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j}; \\ W_i &= \sum_{j=1}^i W_{i,j} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для проверки правильности записи решения, а также для получения выражений для вычисления входящих в выражения (17) коэффициентов нужно подставить (17) в (16). После соответствующих математических преобразований получим окончательные выражения для величин  $u_{i,j}$ ,  $P_{i,j}$ ,  $V_{i,j}$ ,  $W_{i,j}$  в обобщенном виде:

$$\begin{aligned} u_{i,j-1} &= \frac{1}{2(i-j+1)(\gamma+i+j-2)} \times \\ &\times \left\{ u_{i,j-2}(i-j+2)(i-j+1) + \right. \\ &+ c[V_{i-1,j-2}(i-j+1) - V_{i-1,j-1}(\gamma+i+j-2) + \\ &+ W_{i-1,j-2}(i-j+1) - W_{i-1,j-1}(\gamma+i+j-2)] \left. \right\} \\ &(i = 2, 3, \dots; \quad j = 2, \dots, i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{i,j} &= -\frac{8}{(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left( \frac{h_3}{h_2} \right)^2 \times \\ &\times \left\{ V_{i-1,j-1} + cW_{i-1,j-1} + \right. \\ &+ c[u_{i,j-1}(i-j+1) - u_{i,j}(\gamma+i+j-1)] \left. \right\} \\ &(i = 1, 2, \dots; \quad j = 1, \dots, i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{i,j} &= -\frac{8}{(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \times \\ &\times \left\{ W_{i-1,j-1} + cV_{i-1,j-1} + \right. \\ &+ c[u_{i,j-1}(i-j+1) - u_{i,j}(\gamma+i+j-1)] \left. \right\} \\ &(i = 1, 2, \dots; \quad j = 1, \dots, i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= u_{i,j-1}(i-j+1) - u_{i,j}(\gamma+i+j-1) + \\ &+ c(V_{i-1,j-1} + W_{i-1,j-1}) \\ &(i = 1, 2, \dots; \quad j = 1, \dots, i). \end{aligned} \quad (18)$$

Обратим внимание на то, что коэффициенты вида  $u_{i,j}$  из первого выражения (18) не находятся. Они являются константами интегрирования; их значения следует находить из граничных условий.

Перед тем, как задавать граничные условия изучим подробнее смысл полученных результатов. Выражение  $\tau - x$ , возникшее первый раз при решении первого из уравнений (11), т.е. классического волнового уравнения, определено при  $0 \leq x \leq \tau$ . При  $x = \tau$  это выражение равно нулю. Точка  $x = \tau$  является фронтом волны, т.е. точкой, разделяющей возмущенную область  $0 \leq x \leq \tau$  от невозмущенной области  $x > \tau$ , в которую волна еще не дошла. С ростом времени фронт передвигается в положительном направлении оси  $x$  с безразмерной скоростью, равной единице. При  $\tau = 0$  фронт совпадает с началом координат  $x = 0$ . Таким образом, если рассматривать полубесконечный стержень  $x \geq 0$ , то при  $\tau = 0$  он весь находится в покое, т.е. мы имеем нулевые начальные условия. Точка  $x = 0$  излучает волну под действием какой-то нагрузки, приложенной в этой точке.

Рассмотрим возможный вид этой нагрузки. В соответствии с (15) и (17) для продольного усилия имеем:

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i P_{i,j} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j-2}. \quad (19)$$

Подставим в это выражение  $x = 0$ . Обратим внимание на следующее. При  $i \neq j$  выражение  $x^{i-j}$  обращается в ноль при  $x = 0$ . Соответственно, обращаются в ноль слагаемые в (19) при  $i \neq j$ . При  $i = j$  получаем  $x^0 = 1$ . Таким образом, при  $x = 0$  выражение (19) принимает вид:

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} P_{i,i} (\tau - x)^{\gamma+2i-2}. \quad (20)$$

Это означает что нагрузку  $F(t)$  на торце стержня  $x = 0$ , как заданную функцию времени, следует разложить в степенной ряд вида:

$$F = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \tau^{\gamma+2i-2}. \quad (21)$$

Для случая внезапно приложенной и остающейся в дальнейшем постоянной нагрузки  $F = 1$ . В этом случае:

$$F_1 = 1, \quad F_i = 0 \quad (i > 1), \quad \gamma = 0.$$

Сравнение (21) и (20) дает:

$$P_{i,i} = F_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Из четвертого выражения (18) имеем:

$$F_i = P_{i,i} = u_{i,i-1} - u_{i,i}(\gamma + 2i - 1) + c(V_{i-1,i-1} + W_{i-1,i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Отсюда:

$$u_{i,i} = \frac{u_{i,i-1} + c(V_{i-1,i-1} + W_{i-1,i-1}) - F_i}{\gamma + 2i - 1} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

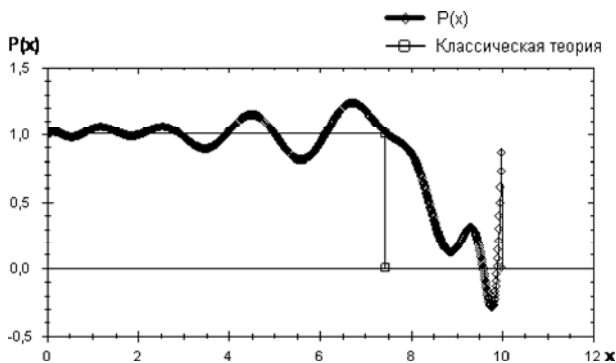


Рис. 1. Распространение волны  $P(x)$  в стержне

Мы видим, что в отличие от картины получаемой при помощи известных уравнений продольной деформации стержня, картина вблизи фронта распространяющейся волны выглядит значительно сложнее.

Вблизи трехмерного фронта волны наблюдаются интенсивные поперечные колебания стержня, которые приводят к быстроизменяющемуся напряженно-деформированному состоянию. В дальнейшем происходит переход к классическому решению в виде так называемого квазифронта, то есть не ступенчатого, а быстроизменяющегося роста продольного усилия. С удалением от фронта, картина переходит в классическую. Таким образом классическое решение для продольной волны в стержне – это медленноизменяющаяся асимптотика по отношению к более точному решению.

### Выводы

Получены уточненные уравнения продольной динамической деформации стержня на основе асимптотико-группового анализа дифференциальных уравнений теории упругости. Рассмотрен пример распространения продольной волны в стержне, показывающий преимущество новых уравнений по отношению к прежним.

### Перечень ссылок

1. Шамровский А. Д. Вывод динамических уравнений продольной деформации стержня при помощи двойного упрощения уравнений теории упругости / А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2009. – № 2. – С. 111–115 с.
2. Шамровский А. Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости / А. Д. Шамровский – Запорожье : Изд-во ЗГИА, 1997 – 169 с.

Одержано 02.04.2010

A. D. Shamrovskiy, L. N. Egarmina

## DESIGN OF LONGITUDINAL WAVE DISTRIBUTION IN BAR BY THE SPECIFIED DYNAMIC EQUATIONS

*За допомогою методу асимптотико-групового аналізу отримані з тривимірних динамічних рівнянь теорії пружності одновимірні динамічні рівняння поздовжньої деформації стержня, більш точні, ніж загальновідомі. Зокрема, швидкість розповсюдження фронту поздовжньої хвилі згідно з уточненими рівняннями співпадає зі швидкістю тривимірної поздовжньої хвилі, у той час, коли у відомих рівняннях вона значно менша. Проаналізовано перехід від зони поблизу тривимірного хвильового фронту до квазифронтів одновимірної хвилі.*

**Ключові слова:** асимптотико-груповий аналіз, уточнені рівняння поздовжньої деформації стержня, поперечні коливання стержня, квазифронт, класичні динамічні рівняння поздовжньої деформації стержня.

*Through the method of asymptotic-group analysis the unidimensional dynamic equations of bar longitudinal deformation are got from three-dimensional dynamic equations of elasticity theory, more exact, than known. In particular the speed of longitudinal wave front distribution in accordance with the specified equations coincides at a speed of three-dimensional longitudinal wave, while it's considerably less in the known equations. A transition from an area near-by three-dimensional wavefront to quasifront of unidimensional wave is analysed.*

**Key words:** asymptotic-group analysis, longitudinal dynamic specified equations of bar deformation, bar transversal vibrations, quasifront, classic dynamic equations of longitudinal bar deformation.