

# IV МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В МЕТАЛУРГІЇ ТА МАШИНОБУДУВАННІ

УДК 539.371

Канд. фіз.-мат. наук С. А. Левчук  
Національний університет, м. Запоріжжя

## МОДЕЛЮВАННЯ СИМЕТРИЧНОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СКЛАДЕНОГО ТІЛА З ДВОХ ПЛАСТИН, З'ЄДНАНИХ ПІД ПРЯМИМ КУТОМ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТРИЦЬ ТИПУ ГРІНА

Задача про статичне деформування складеного тіла розв'язується з використанням спеціально побудованих матриць типу Гріна. На прикладі складеного тіла з двох пластин при спеціальних крайових умовах продемонстровано ефективність методу розрахунку.

**Ключові слова:** статичне деформування, матриці типу Гріна, складене тіло з двох пластин, спеціальні крайові умови.

Нехай мова йде про побудову матриці типу Гріна задачі, яка описує пружну рівновагу пари пластин, з'єднаних під прямим кутом з умовами симетрії на паралельних ребру з'єднання краях (див. рис. 1). Відзначимо, що з фізичної точки зору досліджуване тіло може бути моделлю бічних стінок закритого паралелепіпеда. Це забезпечується наявністю умов симетрії на обох краях складеного тіла, що паралельні ребру з'єднання пластин. Попередня розробка цієї задачі була здійснена у роботах [4–6].

Для визначення пружної рівноваги кожної з пари пластин може бути також використана наступна система диференціальних рівнянь у переміщеннях [1]:

$$\Delta U_v + \frac{\lambda_v + \mu_v}{\mu_v} \frac{\partial}{\partial x_v} \left[ \frac{\partial U_v}{\partial x_v} + \frac{\partial V_v}{\partial y_v} \right] = X_v;$$

$$\Delta V_v + \frac{\lambda_v + \mu_v}{\mu_v} \frac{\partial}{\partial y_v} \left[ \frac{\partial U_v}{\partial x_v} + \frac{\partial V_v}{\partial y_v} \right] = Y_v;$$

$$\Delta \Delta W_v = Z_v. \quad (1)$$

Тут  $U_v = U_v(x_v, y_v)$ ,  $V_v = V_v(x_v, y_v)$ ,  $W_v = W_v(x_v, y_v)$  – проекції вектора зміщень  $\Psi_v = \Psi_v(x_v, y_v)$  на відповідні осі декартової системи координат, а  $X_v = X_v(x_v, y_v)$ ,  $Y_v = Y_v(x_v, y_v)$ ,  $Z_v = Z_v(x_v, y_v)$  – праві частини, що враховують інтенсивність зовнішнього поверхневого навантаження та фізичні характеристики пластини,  $\lambda_v$ ,  $\mu_v$  – коефіцієнти Ламе,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_v^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_v^2}$  – диференціальний оператор Лапласа.

Тут і нижче  $v = 1, 2$  і позначає номер пластини.

Умови симетрії на краях пластин можуть мати вигляд:

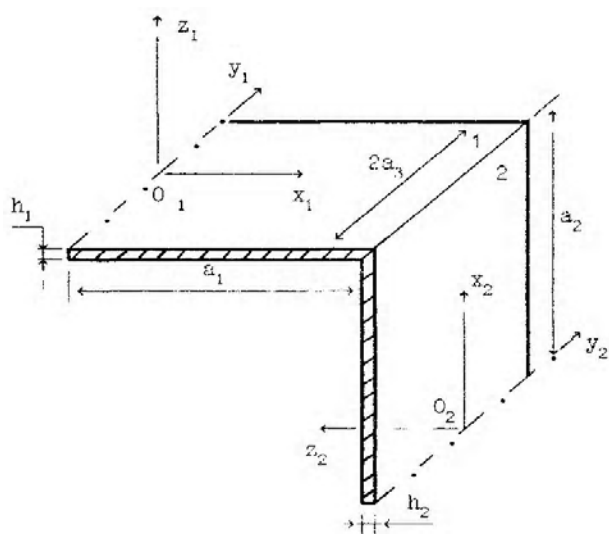


Рис. 1. Складене тіло з двох пластин, при умовах симетрії на краях (під дією довільного навантаження)

$$\begin{aligned}
 U_v|_{x_v=0} = 0; \quad \frac{\partial V_v}{\partial x_v}|_{x_v=0} = 0; \\
 \frac{\partial W_v}{\partial x_v}|_{x_v=0} = 0; \quad \frac{\partial^3 W_v}{\partial x_v^3}|_{x_v=0} = 0. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Для умов з'єднання пластин мають місце вирази:

$$\begin{aligned}
 W_1|_{x_1=a_1} = U_2|_{x_2=a_2}; \quad U_1|_{x_1=a_1} = -W_2|_{x_2=a_2}; \\
 V_1|_{x_1=a_1} = V_2|_{x_2=a_2}; \quad \frac{\partial W_1}{\partial x_1}|_{x_1=a_1} = \frac{\partial W_2}{\partial x_2}|_{x_2=a_2}; \\
 T_{1x}|_{x_1=a_1} + Q_{2x}|_{x_2=a_2} = 0; \quad T_{2x}|_{x_2=a_2} - Q_{1x}|_{x_1=a_1} = 0; \\
 S_{1xy}|_{x_1=a_1} - S_{2xy}|_{x_2=a_2} = 0; \quad M_{2x}|_{x_2=a_2} - M_{1x}|_{x_1=a_1} = 0, \quad (3)
 \end{aligned}$$

де  $Q_{1x}$ ,  $Q_{2x}$  та  $T_{1x}$ ,  $T_{2x}$  – поперечні та розтягувальні сили відповідно;  $S_{1xy}$ , і  $S_{2xy}$  – зсувні зусилля;  $M_{1x}$ ,  $M_{2x}$  – згинальні моменти.

Їх вирази через похідні вектора зміщень мають вигляд [1]:

$$\begin{aligned}
 T_{vx} &= \frac{E_v h_v}{1 - \sigma_v^2} \left( \frac{\partial U_v}{\partial x_v} + \sigma_v \frac{\partial V_v}{\partial y_v} \right); \\
 Q_{vx} &= -\frac{E_v h_v^3}{12(1 - \sigma_v^2)} \frac{\partial}{\partial x_v} \Delta W_v; \\
 S_{vxy} &= \frac{E_v h_v}{2(1 + \sigma_v)} \left( \frac{\partial U_v}{\partial y_v} + \frac{\partial V_v}{\partial x_v} \right); \\
 M_{vx} &= -\frac{E_v h_v^3}{12(1 - \sigma_v^2)} \left( \frac{\partial^2 W_v}{\partial x_v^2} + \sigma_v \frac{\partial^2 W_v}{\partial y_v^2} \right). \quad (4)
 \end{aligned}$$

Тут  $E_v$  – модуль Юнга,  $h_v$  – товщина пластини,  $\sigma_v$  – коефіцієнт Пуассона.

Розв'язок даної задачі будемо шукати у вигляді тригонометричних рядів типу:

$$\begin{aligned}
 U_v(x_v, y_v) &= \sum_{k=1,3}^{\infty} U_{vk}(x_v) \cos \frac{k\pi y_v}{2a_3}; \\
 V_v(x_v, y_v) &= \sum_{k=1,3}^{\infty} V_{vk}(x_v) \sin \frac{k\pi y_v}{2a_3}; \\
 W_v(x_v, y_v) &= \sum_{k=1,3}^{\infty} W_{vk}(x_v) \cos \frac{k\pi y_v}{2a_3}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

де  $2a_3$  – довжина першої і другої пластини у напрямку осі  $(OY)$ . Тоді на краях пластин, що паралельні осі  $(OX)$  будуть виконуватися умови шарнірного спирання.

Компоненти правих частин диференціальних рівнянь також подаються у вигляді тригонометричних рядів:

$$\begin{aligned}
 X_v(x_v, y_v) &= \sum_{k=1,3}^{\infty} X_{vk}(x_v) \cos \frac{k\pi y_v}{2a_3}; \\
 Y_v(x_v, y_v) &= \sum_{k=1,3}^{\infty} Y_{vk}(x_v) \sin \frac{k\pi y_v}{2a_3}; \\
 Z_v(x_v, y_v) &= \sum_{k=1,3}^{\infty} Z_{vk}(x_v) \cos \frac{k\pi y_v}{2a_3}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

де  $X_{vk}(x_v)$ ,  $Y_{vk}(x_v)$ ,  $Z_{vk}(x_v)$  – коефіцієнти ряду Фур'є:

$$\begin{aligned}
 X_{vk}(x_v) &= \frac{1}{a_3} \int_{-a_3}^{a_3} X_v(x_v, \eta) \cos(k\eta) d\eta; \\
 Y_{vk}(x_v) &= \frac{1}{a_3} \int_{-a_3}^{a_3} Y_v(x_v, \eta) \sin(k\eta) d\eta; \\
 Z_{vk}(x_v) &= \frac{1}{a_3} \int_{-a_3}^{a_3} Z_v(x_v, \eta) \cos(k\eta) d\eta. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Внаслідок підставлення (5), (6) у (1), одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами для кожної з пари пластин:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^4 W_{vk}}{dx_v^4} - 2 \left( \frac{k\pi}{2a_3} \right)^2 \frac{d^2 W_{vk}}{dx_v^2} + \left( \frac{k\pi}{2a_3} \right)^4 W_{vk} &= Z_{vk}; \\
 (1 + q_v) \frac{d^2 U_{vk}}{dx_v^2} - \left( \frac{k\pi}{2a_3} \right)^2 U_{vk} + q_v \frac{k\pi}{2a_3} \frac{dV_{vk}}{dx_v} &= X_{vk}; \\
 \frac{d^2 V_{vk}}{dx_v^2} - \left( \frac{k\pi}{2a_3} \right)^2 (1 + q_v) V_{vk} - q_v \frac{k\pi}{2a_3} \frac{dU_{vk}}{dx_v} &= Y_{vk}, \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\text{де } q_v = \frac{\lambda_v + \mu_v}{\mu_v}.$$

Введемо позначення  $l = k\pi/(2a_3)$ . Підставивши (5) в умови симетрії (2), а також в умови з'єднання пластин (3), перетворимо їх до вигляду:

умови симетрії:

$$\begin{aligned}
 U_{vk}|_{x_v=0} = 0; \quad \frac{dV_{vk}}{dx_v}|_{x_v=0} = 0; \\
 \frac{dW_{vk}}{dx_v}|_{x_v=0} = 0; \quad \frac{d^3 W_{vk}}{dx_v^3}|_{x_v=0} = 0; \quad (9)
 \end{aligned}$$

умови з'єднання елементів:

$$\begin{aligned}
 W_{1k} \Big|_{x_1=a_1} &= U_{2k} \Big|_{x_2=a_2}; \quad U_{1k} \Big|_{x_1=a_1} = -W_{2k} \Big|_{x_2=a_2}; \\
 V_{1k} \Big|_{x_1=a_1} &= V_{2k} \Big|_{x_2=a_2}; \quad \frac{dW_{1k}}{dx_1} \Big|_{x_1=a_1} = \frac{dW_{2k}}{dx_2} \Big|_{x_2=a_2}; \\
 \frac{h_1^2}{12} \left[ \frac{d^3 W_{1k}}{dx_1^3} - l^2 \frac{dW_{1k}}{dx_1} \right] \Big|_{x_1=a_1} &+ \\
 + \left[ \frac{dU_{2k}}{dx_2} + \frac{q_2 - 1}{2q_2} l V_{2k} \right] \Big|_{x_2=a_2} &= 0; \\
 -\frac{h_2^2}{12} \left[ \frac{d^3 W_{2k}}{dx_2^3} - l^2 \frac{dW_{2k}}{dx_2} \right] \Big|_{x_2=a_2} &+ \\
 + \left[ \frac{dU_{1k}}{dx_1} + \frac{q_1 - 1}{2q_1} l V_{1k} \right] \Big|_{x_1=a_1} &= 0; \\
 \left[ \frac{dV_{1k}}{dx_1} - l U_{1k} \right] \Big|_{x_1=a_1} - \left[ \frac{dV_{2k}}{dx_2} - l U_{2k} \right] \Big|_{x_2=a_2} &= 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{d^2 W_{1k}}{dx_1^2} - \frac{q_1 - 1}{2q_1} l^2 W_{1k} \right] \Big|_{x_1=a_1} - \\
 - \left[ \frac{d^2 W_{2k}}{dx_2^2} - \frac{q_2 - 1}{2q_2} l^2 W_{2k} \right] \Big|_{x_2=a_2} &= 0. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Враховуючи, що фундаментальна система розв'язків одержаних диференціальних рівнянь (8) відома і має вигляд [2]:

$$\begin{aligned}
 W_{vk}^{(1)}(x_v) &= ch(lx_v); \quad W_{vk}^{(2)}(x_v) = sh(lx_v); \\
 W_{vk}^{(3)}(x_v) &= x_v ch(lx_v); \quad W_{vk}^{(4)}(x_v) = x_v sh(lx_v); \\
 U_{vk}^{(1)}(x_v) &= ch(lx_v); \quad U_{vk}^{(2)}(x_v) = sh(lx_v); \\
 U_{vk}^{(3)}(x_v) &= x_v ch(lx_v); \quad U_{vk}^{(4)}(x_v) = x_v sh(lx_v); \\
 V_{vk}^{(1)}(x_v) &= -sh(lx_v); \quad V_{vk}^{(2)}(x_v) = -ch(lx_v); \\
 V_{vk}^{(3)}(x_v) &= -\frac{2+q_v}{q_v l} ch(lx_v) - x_v sh(lx_v); \\
 V_{vk}^{(4)}(x_v) &= -\frac{2+q_v}{q_v l} sh(lx_v) - x_v ch(lx_v).
 \end{aligned}$$

Доцільно розв'язувати вказані вище системи звичайних диференціальних рівнянь методом варіації довільних сталих, при цьому, одержимо вирази:

$$\begin{aligned}
 W_{vk}(x_v) &= \int_0^{x_v} Z_{vk}(\xi) \frac{sh(l(\xi - x_v)) - l(\xi - x_v)ch(l(\xi - x_v))}{2l^3} d\xi + \\
 &+ \sum_{i=1}^4 \gamma_{vk}^{(i)} W_{vk}^{(i)}(x_v);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{vk}(x_v) &= \int_0^{x_v} X_{vk}(\xi) \frac{q_v l(\xi - x_v)ch(l(\xi - x_v)) - (2+q_v)sh(l(\xi - x_v))}{2l(1+q_v)} d\xi - \\
 &- \int_0^{x_v} Y_{vk}(\xi) \frac{q_v}{2(1+q_v)} (\xi - x_v) sh(l(\xi - x_v)) d\xi + \\
 &+ \sum_{i=5}^8 \gamma_{vk}^{(i)} U_{vk}^{(i-4)}(x_v);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{vk}(x_v) &= \int_0^{x_v} X_{vk}(\xi) \frac{q_v}{2(1+q_v)} (\xi - x_v) sh \\
 &- \int_0^{x_v} Y_{vk}(\xi) \frac{q_v l(\xi - x_v)ch(l(\xi - x_v)) + (2+q_v)sh(l(\xi - x_v))}{2l(1+q_v)} d\xi + \\
 &+ \sum_{i=1}^4 \gamma_{vk}^{(i)} V_{vk}^{(i-4)}(x_v). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Потім, використовуючи додаткові умови (9), (10), належить визначити невідомі сталі  $\gamma_{vk}^{(i)}$ . Підставивши знайдені  $\gamma_{vk}^{(i)}$  у (11), а потім отримані вирази у (5), одержимо остаточний розв'язок задачі (1)–(3) у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \Psi_v(x_v, y_v) &= \int_{-a_3}^{a_3} \int_0^{a_1} \Omega_v(x_v, y_v, \xi, \eta) \Phi_1(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\
 &+ \int_{-a_3}^{a_3} \int_0^{a_2} \Theta_v(x_v, y_v, \xi, \eta) \Phi_2(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (12)
 \end{aligned}$$

де  $\Omega_v(x_v, y_v, \xi, \eta)$ ,  $\Theta_v(x_v, y_v, \xi, \eta)$  – побудовані матриці типу Гріна для даної задачі, які мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \Omega_v(x_v, y_v, \xi, \eta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_3} \Theta_k(y_v) \omega_{vk}(x_v, \xi) \Theta_k(\eta); \\
 \Theta_v(x_v, y_v, \xi, \eta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_3} \Theta_k(y_v) \theta_{vk}(x_v, \xi) \Theta_k(\eta), \quad (13)
 \end{aligned}$$

де

$$\Theta_k(y_v) = \begin{Bmatrix} \cos(k\pi/(2a_3)y_v) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(k\pi/(2a_3)y_v) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(k\pi/(2a_3)y_v) \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

$\Phi_v(\xi, \eta)$  – вектор правих частин рівнянь (1) (більш детально про матриці Гріна див. [7]).

Нижче, як приклад застосування описаного методу, наведено результати розрахунку основних характеристик статичного деформування розглянутого вище

прямокутного з'єднання двох пластин (рис. 2–6). При обчисленнях було прийнято:  $a_1/h_1 = 25$ ;  $a_2/h_2 = 12,5$ ;  $a_3/h_1 = 3$ ;  $E/q_{yv} = 2 \cdot 10^7$ ;  $\sigma = 0,25$ ;  $k = 1$ ;  $q_{x1} = q_{x2} = q_{z1} = q_{z2} = 0$ .

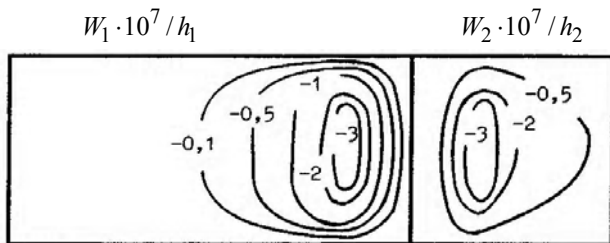


Рис. 2. Нормальні прогини

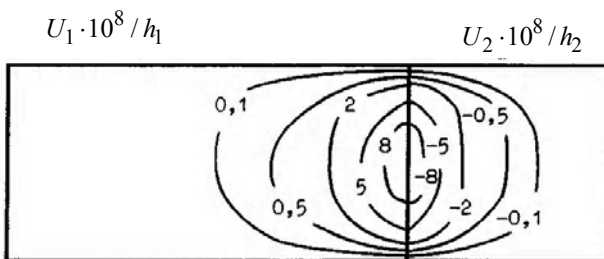


Рис. 3. Зміщення вздовж осі

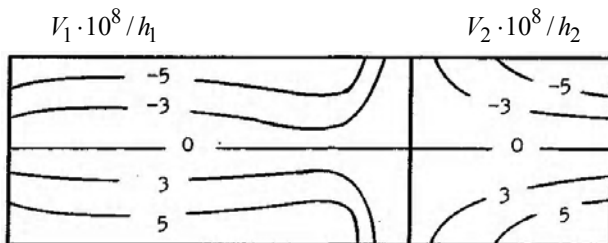


Рис. 4. Зміщення вздовж осі

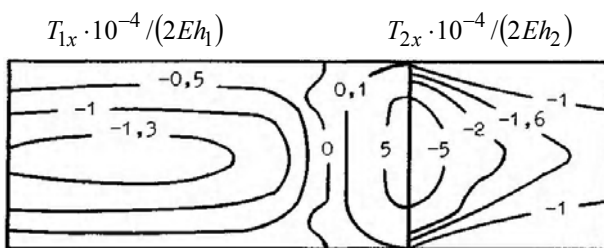


Рис. 5. Розтягувальні сили

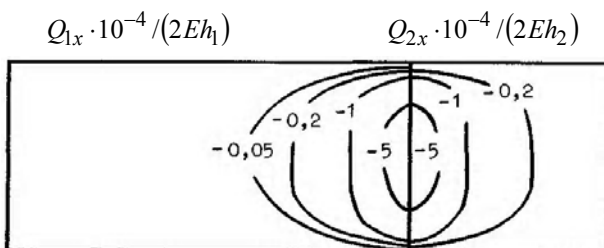


Рис. 6. Поперечні сили

У роботі [8] був описаний метод розрахунку напружено-деформованого стану пологих оболонок з отворами за допомогою побудованих матриць Гріна. Слід зазначити, що використані тут і у [8] алгоритми розрахунку дозволяють також враховувати сумісне деформування досліджуваних конструкцій у простих випадках навантаження. Наприклад, якщо на пластину з отворами діє тільки зовнішнє поверхневе нормальне навантаження (див. [8]), то для передачі дії на стінки складеної конструкції (див. рис. 1) доцільно прирівняти складову інтенсивності навантаження вздовж відповідної осі (осі  $OY$ ) до інтенсивності діючого навантаження, що і було зроблено у даній роботі. Особливості розподілу напружень і деформацій по бічних стінках враховуються при цьому за допомогою представлень (5), (6).

### Перелік посилань

1. Биргер М. А. Прочность, устойчивость, колебания : в 3 т. / М. А. Биргер, Я. Г. Пановко – М. : Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 832 с.
2. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М.-Л. : Физматгиз, 1962. – 708 с.
3. Гавеля С. П. Метод построения матриц типа Грина для составных оболочек / С. П. Гавеля // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1981. – № 9. – С. 12–17.
4. Гавеля С. П. Матрица типа Грина задачи об упругом деформировании составной конструкции из двух пластин / С. П. Гавеля, С. А. Левчук, Н. В. Чирка – Запорожье, 1992. – 15 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 17.12.92, № 2002. – Ук92.
5. Левчук С. А. Расчет напряженно-деформированного состояния элементов сложных технических конструкций / С. А. Левчук – Запорожье, 1997. – 24 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 17.06.97. – № 447. – Ук97.
6. Левчук С. А. Дослідження статичного деформування складеної конструкції з двох пластин / С. А. Левчук // Вісник Запорізького державного університету : сер. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя, 1998. – № 2. – С. 79–81.
7. Левчук С. А. Матриці Гріна рівнянь та систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл : дис. ... кандидата фіз.-мат. наук : 01.02.04/ Левчук Сергій Анатолійович. – Запоріжжя : ЗДУ, 2002. – 150 с.
8. Левчук С. А. Розрахунок напружено-деформованого стану пологих оболонок з отворами за допомогою матриць Гріна / С. А. Левчук // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2009. – № 2. – С. 102–106.

Одержано 28.01.2010

## MODELING OF SYMMETRICAL STRAINLY-DEFORM STATE OF TWO PLATE BODY COMPOUND JOINTED AT THE RIGHT ANGLE WITH GREEN'S TYPE MATRIX

*Задача о статическом деформировании составного тела решается с использованием специально построенных матриц типа Грина. На примере составного тела из двух пластин при специальных краевых условиях продемонстрирована эффективность метода расчета.*

**Ключевые слова:** статическое деформирование, матрицы типа Грина, составное тело из двух пластин, специальные краевые условия.

*The problem of compound body static deformation is solved with use of specially constructed Green's type matrix. The calculation method effectiveness had been shown for the compound body with two plates with special border conditions.*

**Key words:** static deformation, Green's type matrix, two plate body compound, special border conditions.

---

УДК 519.63:533.9.07

Е. В. Цегельник, канд. физ.-мат. наук Е. К. Островский, В. О. Гарин  
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков

## ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЙ ЗАТВОР АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА В ИСТОЧНИКАХ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ – ПЛАЗМОТРОНАХ

*Проведено математическое моделирование процесса молекулярной диффузии атмосферного воздуха во встречном потоке защитного инертного газа на участке газодинамического затвора в канале слива плазмы из плазмотрона. Показано, что при массовом расходе инертного газа аргон, вплоть до  $10^{-3}$  кг/с, течение в канале остается ламинарным. Установлено, что основным источником поступления отравляющего катода атмосферного воздуха в плазмотрон является его диффузия во встречном потоке инертного газа в сливном канале плазмы на участке газодинамического затвора атмосферного воздуха. Наиболее интенсивно молекулярная диффузия воздуха происходит в пограничном слое у стенок сливного канала плазмы, который на своем начальном участке выполняет функции газодинамического затвора.*

**Ключевые слова:** низкотемпературная плазма, катод, термоэлектронная эмиссия, дуговой разряд, газовый поток, ламинарное течение, плазмотрон.

### Введение

В промышленности высокоразвитых стран отмечается тенденция к расширению применения плазмотронов как источников низкотемпературной плазмы. Разработаны технологии получения чистых металлов и сплавов при прямом восстановлении их из руд и рудных концентратов, при подогреве в ходе внепечной обработки и разливе металлов [1, 2].

Особенностью плазмотронов, работающих в металлургии в условиях интенсивного испарения металлов с поверхности расплавов, является необходимость использования малых рабочих напряжений, исключающих появление неуправляемых пробоев. Такой режим

работы возможно реализовать только в низковольтном сильноточном дуговом разряде [3].

Большая мощность в таком разряде достигается за счет больших токов электронной эмиссии с развитой поверхности в полой катоде. Такие токи возможно реализовать переходом от электрической дуги с пятном на катоде к диффузному равномерно распределенному разряду по всей поверхности катода. Это возможно реализовать выбором как Фомы катода (полый катод), так и переходу к новому классу «горячих» высокотемпературных электродов – термоэмиссионным катодам с малой работой выхода электрона  $\phi = 2,0 \dots 2,4$  эВ в диапазоне температур 1200...1600 К [4].