p-ISSN 1607-6885 Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. 2025/2
e-ISSN 2786-7358 New materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering. 2025/2

УДК 539.3

Ніна Антоненко — канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри математики Національного університету «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна, *e-mail: antonenkonina.ua@gmail.com*, ORCID: 0000-0002-0427-6499

Ірина Ткаченко — канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики Запорізького національного університету, м. Запоріжжя, Україна, *e-mail: tig.phd81@gmail.com*, ORCID: 0000-0002-4232-2484

ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ З ГЛАДКИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

Мета роботи. *Отримати формули для визначення термо-напружено-деформованого стану шаруватої плити з гладким контактом між шарами, що лежить на абсолютно жорсткій півплощині, та проілюструвати вплив теплових навантажень на розподіл напружень в її точках.*

Методи дослідження. *Для розв'язання задачі використано інтегральне перетворення Фур'є та метод функцій податливості.*

Отримані результати. *Представлено аналітичний розв'язок двовимірної задачі термопружності для окремого однорідного шару, межі якого вільні від дотичних навантажень. Розв'язок побудовано з використанням інтегрального перетворення Фур'є, що дозволило понизити порядок задачі та від рівнянь в частинних похідних перейти до звичайних диференціальних рівнянь. Компоненти термо-напружено-деформованого стану шару представлено у вигляді комбінацій допоміжних функцій: нормальних напружень, вертикальних переміщень, температури та теплового потоку на верхній межі шару. Отримано рекурентні співвідношення між допоміжними функціями сусідніх шарів багатошарової термопружної основи, що розглядається. Встановлено, що допоміжні функції окремого шару пов'язані між собою лінійними залежностями, коефіцієнти яких називаються функціями податливості. На основі побудованих рекурентних співвідношень отримано функції податливості для багатошарової основи за умови гладкого контакту між шарами. Як приклад практичного застосування запропонованого методу розглянуто двошарову основу, що складається з бетонного та сталевого шарів, які лежать на абсолютно жорсткій півплощині. Для цієї моделі визначено розподіли нормальних напружень у верхньому шарі, а також досліджено вплив теплового навантаження на їхню зміну. Аналіз результатів показав, що врахування термопружних властивостей матеріалів має суттєвий вплив на формування напружень у шарах основи. Отримані результати можуть бути використані при проєктуванні багатошарових конструкцій, зокрема основ транспортних споруд та будівель, які зазнають дії змінних температурних полів.*

Наукова новизна. *Метод функцій податливості поширено на двовимірну задачу термопружності для шаруватої основи з гладким контактом між шарами.*

Практична цінність. *Отримані формули можуть бути застосовані для розрахунку на міцність фундаментів споруд, підлог заводських цехів, аеродромних та дорожніх покриттів, які експлуатуються під впливом високих температур. Результати можуть бути використаними також в якості тестових при розв'язанні поставленої задачі іншими методами.*

***Ключові слова**: багатошарова основа, температура, напруження, інтегральне перетворення Фур'є, функції податливості.*

Вступ та аналіз досліджень і публікацій

Дослідження термо-напружено-деформованого стану багатошарових основ та плит має велике значення для сучасного будівництва, машинобудування, авіаційної та космічної техніки. Це пов'язано з тим, що такі конструкції широко застосовуються у високонавантажених системах, де необхідно забезпечити оптимальне поєднання міцності та термостійкості. Аналіз напружено-деформованого стану дозволяє врахувати особливості взаємодії шарів і спрогнозувати їхню поведінку в експлуатаційних умовах.

Різні підходи до розв'язання задач термопружності для шаруватих тіл розглядалися у численних працях. З використанням інтегрального перетворення Фур'є-Бесселя та функцій Гріна автори [1] досліджували термопружний стан шаруватих симетричних тіл. В роботах Процюка Б. В. з використанням функцій Ґріна знайдено розв'язки тривимірних статичних і квазістатичних задач термопружності для шаруватих простору, півпростору та шару [2], розв'язано статичні термопружні задачі для багатошарових тіл канонічної форми [3]. Для визначення статичного термопружного стану плоских багатошарових термочутливих структур, зокрема шаруватих плит, авторами [4] розроблено аналітико-числовий метод, що базується на застосуванні узагальнених функцій, апроксимації залежностей фізико-механічних характеристик від температури

DOI 10.15588/1607-6885-2025-2-7

кусково-сталими функціями та введенні у розгляд аналогів функції Кірхгофа. Асимптотичними методами розв'язки задач термопружності для шаруватих композитів отримано в [5, 6]. Авторами [7] з використанням перетворення Лапласа отримано аналітичний розв'язок задачі термопружності для трансверсально-ізотропного шаруватого півпростору. Методом скінченних елементів задачі термопружності для тіл, що мають шарувату структуру, розв'язувались у [8-11]. У працях [12, 13] запропоновано різні термопружні моделі врахування неідельного контакту шарів. Аналітичний розв'язок задачі про термо-напружений стан композитних пластин із ідеальним та гладким механічними контактами між шарами представлено в [14] на основі тривимірної теорії пружності.

Одним із ефективних методів розв'язання задач теорії пружності та термопружності є метод функцій податливості, запропонований Приварниковим А.К. У статтях [15, 16] цим методом розв'язано задачі термопружності для багатошарової основи з ідеальним та неідеальними тепловими контактами між шарами за повного механічного контакту між шарами. Метод функцій податливості поширюється на задачу про визначення термо-напружено-деформованого стану багатошарової основи з гладким контактом між шарами. Раніше, з використанням цієї методики, Приварниковим А.К. отримано розв'язок осесиметричної задачі для багатошарової основи з гладким контактом між шарами без врахування впливу температурних полів.

Постановка задачі

Розглянемо пакет, що складається з n однорідних, невагомих та ізотропних шарів, що лежить на абсолютно жорсткій півплощині. Кожен шар характеризується товщиною h, коефіцієнтами Ламе λ та μ, коефіцієнтом теплопровідності k_T та приведеним коефіцієнтом теплового розширення $\alpha_T = \tilde{\alpha}_T\,(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + 2\mu)$, де $\tilde{\alpha}_T$ – коефіцієнт теплового розширення матеріалу. На поверхні основи відомі напруження та температура. На нижній межі пакету підтримується нульова температура. На стиках шарів виконуються умови гладкого контакту. Шари не відстають один від одного. Температура на спільних межах шарів змінюється неперервно. Основа знаходиться в умовах плоскої деформації. Необхідно визначити компоненти термо-напружено-деформованого стану для усіх точок основи.

Нумерацію шарів будемо проводити зверху вниз, починаючи з одиниці. Півплощина матиме номер $n+1$. Усі величини, які відносяться до шару з номером j, будемо позначати відповідним індексом. У кожному шарі введемо локальну декартову систему координат $O_j x z_j$ так, як показано на рис. 1.

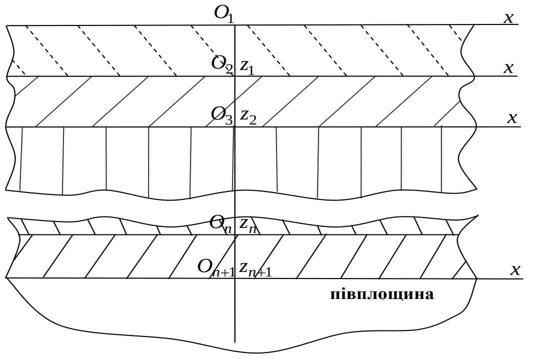

Рисунок 1. Багатошарова основа

Задача зводиться до розв'язання такої системи диференційних рівнянь для кожного з шарів:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \tilde{\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \omega \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \tilde{\omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \alpha_T \frac{\partial T}{\partial z}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \qquad (2)$$

де $u(x,z)$, $w(x,z)$ – функції, що описують горизонтальні та вертикальні переміщення точок шару відповідно, $T(x,z)$ – температура, $\omega = \dfrac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$, $\tilde{\omega} = 1 - \omega$.

Умови на спільних межах шарів:

$$w_{j+1}(x,0) = w_j(x,h_j), \qquad (3)$$

$$\sigma_{z\,j+1}(x,0) = \sigma_{z\,j}(x,h_j), \qquad (4)$$

$$\tau_{xz\,j+1}(x,0) = \tau_{xz\,j}(x,h_j) = 0, \qquad (5)$$

$$T_{j+1}(x,0) = T_j(x,h_j),$$

$$k_{T\,j+1} \frac{\partial T_{j+1}}{\partial z}(x,0) = k_{T\,j} \frac{\partial T_j}{\partial z}(x,h_j).$$

Умови на межі n-го шару та абсолютно жорсткої півплощини:

$$w_{n+1}(x,0) = 0, \ T_{n+1}(x,0) = 0. \qquad (6)$$

Умови на верхній межі основи:

$$\sigma_{z1}(x,0) = \sigma(x), \ \tau_{xz1}(x,0) = 0, \qquad (7)$$

$$T_1(x,0) = f(x). \qquad (8)$$

Закон Дюамеля-Неймана, який пов'язує між собою напруження, деформації та температуру, у випадку плоскої деформації має вигляд:

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda \varepsilon_z - (3\lambda + 2\mu)\tilde{\alpha}_T T, \ \tau_{xz} = \mu \gamma_{xz},$$

DOI 10.15588/1607-6885-2025-2-7

$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_x - (3\lambda + 2\mu)\tilde{\alpha}_T T .$$

Метод розв'язання

Задача розв'язується за допомогою перетворення Фур'є за змінною x :

$$\bar{v}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{i\xi x} dx . \quad (9)$$

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{v}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi . \quad (10)$$

Спочатку отримаємо формули, які дозволяють за відомим законом розподілу нормальних напружень та температурою точок верхньої межі шару визначити напруження та переміщення в будь-якій точці шару за умов, що дотичні напруження на межах шару дорівнюють нулю.

Трансформанту температури в будь-якій точці шару можна знайти за формулою [15]:

$$\overline{T}(\xi, z) = \eta \,\mathrm{ch} pz + \varepsilon \,\mathrm{sh} pz ,$$

де $p = |\xi|$, $\eta = \eta(\xi)$, $\varepsilon = \varepsilon(\xi)$ – допоміжні функції шару, які задаються такими рівностями

$$\eta(\xi) = \overline{T}(\xi, 0), \; p\varepsilon(\xi) = \frac{d\overline{T}}{dz}(\xi, 0). \quad (11)$$

Застосувавши до системи (1) перетворення (9), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь, яку подамо у вигляді:

$$\begin{cases} p^2 U - \tilde{\omega}\dfrac{d^2 U}{dz^2} + p\omega \dfrac{dW}{dz} = \alpha_T p^2 \overline{T}, \\ \omega p \dfrac{dU}{dz} + \dfrac{d^2 W}{dz^2} - \tilde{\omega}\, p^2 W = \alpha_T p \dfrac{d\overline{T}}{dz}. \end{cases} \quad (12)$$

де $U(\xi, z) = -i\xi \bar{u}(\xi, z)$, $W(\xi, z) = p\,\bar{w}(\xi, z)$.

Загальний розв'язок системи (12) має вигляд:

$$U(\xi, z) = (A_1 + A_2 z)\mathrm{ch}\, pz + (A_3 + A_4 z)\mathrm{sh}\, pz + \\ + \frac{\alpha_T}{2\tilde{\omega}}\left[-\eta pz \,\mathrm{sh}\, pz + \varepsilon\tilde{\omega}(\mathrm{sh}\, pz - pz \,\mathrm{ch}\, pz)\right], \quad (13)$$

$$W(\xi, z) = \frac{1}{p}\left[\left(\frac{2-\omega}{\omega} A_2 - pA_3 - pzA_4\right)\mathrm{ch}\, pz + \right. \\ \left. + \left(-pA_1 - pzA_2 + \frac{2-\omega}{\omega} A_4\right)\mathrm{sh}\, pz\right] + \\ + \frac{\alpha_T}{2\tilde{\omega}}\left[\eta(pz\mathrm{ch} pz - \mathrm{sh} pz) + \varepsilon\tilde{\omega}\, pz\mathrm{sh} pz\right]. \quad (14)$$

Користуючись закон Дюамеля-Неймана та формулами Коші $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}$, $\gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}$, представимо напруження через функції переміщень u, w і функцію температури T :

$$\sigma_x = \lambda \frac{\partial w}{\partial z} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\alpha_T \mu}{\tilde{\omega}} T ,$$

$$\sigma_z = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\alpha_T \mu}{\tilde{\omega}} T ,$$

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} .$$

У просторі транформант напруження мають вигляд:

$$\bar{\sigma}_x(\xi, z) = \frac{\mu}{\tilde{\omega}} U + \frac{\lambda}{p}\frac{dW}{dz} - \frac{\alpha_T \mu}{\tilde{\omega}} T ,$$

$$\bar{\sigma}_z(\xi, z) = \lambda U + \frac{\mu}{\tilde{\omega}}\frac{1}{p}\frac{dW}{dz} - \frac{\alpha_T \mu}{\tilde{\omega}} T ,$$

$$-\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{xz}(\xi, z) = \mu\left(\frac{1}{p}\frac{dU}{dz} - W\right).$$

Розглянемо крайову задачу для окремого шару, на верхній та нижній межах якого відсутні дотичні напруження. Крайові умови:

$$\sigma_z(x,0) = \sigma(x), \; w(x,0) = w(x), \\ \tau_{xz}(x,0) = 0 , \quad \tau_{xz}(x,h) = 0 , \quad (15)$$

де функції $\sigma(x)$ та $w(x)$ вважаємо відомими.

Застосуємо до крайових умов (15) інтегральне перетворення Фур'є (9), отримаємо:

$$\bar{\sigma}_z(\xi,0) = \bar{\sigma}(\xi), \; \bar{w}(\xi,0) = \bar{w}(\xi), \\ \bar{\tau}_{xz}(\xi,0) = 0 , \quad \bar{\tau}_{xz}(\xi,h) = 0 . \quad (16)$$

Введемо допоміжні функції $\alpha = \alpha(\xi)$ та $\beta = \beta(\xi)$:

$$\alpha = \bar{\sigma}(\xi), \; \beta = 2\mu\omega p\bar{w}(\xi). \quad (17)$$

Умови (16) набувають вигляду:

$$\bar{\sigma}_z(\xi,0) = \alpha , \; 2\mu\omega W(\xi,0) = \beta , \\ -\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{xz}(\xi,0) = 0 , \; -\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{xz}(\xi,h) = 0 . \quad (18)$$

Підставивши в ліві частини рівностей (18) вирази для $\bar{\sigma}_z(\xi, z)$, $W(\xi, z)$, $\bar{\tau}_{xz}(\xi, z)$ при $z = 0$ та $\bar{\tau}_{xz}(\xi, z)$ при $z = h$, отримаємо систему, з якої знайдемо представлення A_1, A_2, A_3, A_4 через α, β, η, ε. Підставивши вирази для A_1, A_2, A_3, A_4 у вирази для транформант переміщень та напружень, отримаємо:

DOI 10.15588/1607-6885-2025-2-7

$$2\mu\omega F\cdot U(\xi,z)=\left[\left(-\omega\tilde{p}C+\tilde{\omega}S\right)\operatorname{ch}pz+\omega pzS\operatorname{sh}pz\right]\alpha+$$
$$+\left[\left(\omega\tilde{p}\,pzC+\left(\omega pz-\tilde{p}\right)S\right)\operatorname{ch}pz+\right.$$
$$\left.+\left(\tilde{\omega}\tilde{p}C+\left(\tilde{\omega}-\omega\tilde{p}\,pz\right)\right)\operatorname{sh}pz\right]\beta+$$
$$+\alpha_T\mu\left(S+\tilde{p}C\right)\operatorname{ch}pz\,\eta+$$
$$+\alpha_T\mu\left[\left(-\omega\tilde{p}\,pzC+\left(\tilde{p}-\omega pz\right)S\right)\operatorname{ch}pz+\right.$$
$$\left.+\omega\left(\tilde{p}C+\left(1+\tilde{p}\,pz\right)S\right)\operatorname{sh}pz\right]\varepsilon,\qquad(19)$$

$$2\mu\omega F\cdot W(\xi,z)=\left[-\omega pzS\operatorname{ch}pz+\left(S+\omega\tilde{p}C\right)\operatorname{sh}pz\right]\alpha+$$
$$+\left[\left(S+\tilde{p}C+\omega\tilde{p}\,pzS\right)\operatorname{ch}pz+\right.$$
$$\left.+\left(-\omega\tilde{p}pzC-\left(\omega pz+\tilde{\omega}\tilde{p}\right)S\right)\operatorname{sh}pz\right]\beta+$$
$$+\alpha_T\mu\left(\tilde{p}C+S\right)\operatorname{sh}pz\,\eta+$$
$$+\alpha_T\mu\left[-\omega\tilde{p}\,pzS\operatorname{ch}pz+\right.$$
$$\left.+\left(\omega\tilde{p}\,pzC+\left(\omega pz+\tilde{\omega}\tilde{p}\right)S\right)\operatorname{sh}pz\right]\varepsilon,\qquad(20)$$

$$F\cdot\bar{\sigma}_z(\xi,z)=\left[\left(\tilde{p}C+S\right)\operatorname{ch}pz-pzS\operatorname{sh}pz\right]\alpha+$$
$$+\left[\left(-\tilde{p}\,pzC-pzS\right)\operatorname{ch}pz+\right.$$
$$\left.+\left(\tilde{p}\,C+\left(1+\tilde{p}\,pz\right)S\right)\operatorname{sh}pz\right]\beta+$$
$$+\alpha_T\mu\left[\left(\tilde{p}\,pzC+pzS\right)\operatorname{ch}pz-\right.$$
$$\left.-\left(\left(1+\tilde{p}\,pz\right)S+\tilde{p}C\right)\operatorname{sh}pz\right]\varepsilon,\qquad(21)$$

$$F\cdot\left(-\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{xz}(\xi,z)\right)=\left[pzS\operatorname{ch}pz-\tilde{p}C\operatorname{sh}pz\right]\alpha+$$
$$+\left[\left(\tilde{p}\,pzC+\left(pz-\tilde{p}\right)S\right)\operatorname{sh}pz-\right.$$
$$\left.-\tilde{p}\,pzS\operatorname{ch}pz\right]\beta+\alpha_T\mu\left[\tilde{p}\,pzS\operatorname{ch}pz+\right.$$
$$\left.+\left(-\tilde{p}\,pzC+\left(\tilde{p}-pz\right)S\right)\operatorname{sh}pz\right]\varepsilon,\qquad(22)$$

де $\tilde{p}=ph$, $C=\operatorname{ch}\tilde{p}$, $S=\operatorname{sh}\tilde{p}$, $F=S+\tilde{p}C$.

Отже, знаючи допоміжні функції шару, можна визначити компоненти термо-напружено-деформованого стану шару.

Побудуємо рекурентні співвідношення між допоміжними функціями сусідніх шарів. У [15] доведено, що

$$\eta_{j+1}=\left(C_j-r_jS_j\right)\eta_j,\qquad(23)$$
$$\varepsilon_j=-r_j\eta_j,\qquad(24)$$
$$r_j=\frac{r_{j+1}C_j+\Delta_jS_j}{r_{j+1}S_i+\Delta_jC_j},\ r_n=\operatorname{cth}p_n,\qquad(25)$$

де $p_j=ph_j$, $S_j=\operatorname{sh}p_j$, $C_j=\operatorname{ch}p_j$, $\Delta_j=\dfrac{k_{T\,j}}{k_{T\,j+1}}$.

Застосуємо до умов (3) та (4) інтегральне перетворення Фур'є (9), тоді в просторі транс-формант Фур'є вони приймають вигляд:

$$\bar{\sigma}_{z\,j+1}(\xi,0)=\bar{\sigma}_{z\,j}(\xi,h_j),$$
$$2\mu_{j+1}\omega_{j+1}W_{j+1}(\xi,0)=2\mu_{j+1}\omega_{j+1}W_j(\xi,h_j).$$

Застосувавши формули (17) до лівих частин останніх співвідношень, а формули (20) та (21) при $z=h_j$ до їх правих частин, отримаємо рекурентні співвідношення між допоміжними функціями сусідніх шарів:

$$2F_j\,\alpha_{j+1}=\left(2p_j+\operatorname{sh}2p_j\right)\alpha_j+\left(\operatorname{ch}2p_j-1-2p_j^2\right)\beta_j-$$
$$-\alpha_{Tj}\,\mu_j\,r_j\left(2p_j^2-\operatorname{ch}2p_j+1\right)\eta_j,\qquad(26)$$
$$2F_j\,\beta_{j+1}=d_j\left(\left(\operatorname{ch}2p_j-1\right)\alpha_j+\left(\operatorname{sh}2p_j+2p_j\right)\beta_i+\right.$$
$$\left.+\alpha_{T\,j}\,\mu_j\left(p_j\operatorname{sh}2p_j+\left(1-p_jr_j\right)\left(\operatorname{ch}2p_j-1\right)\right)\eta_j\right),\qquad(27)$$

де $d_j=\dfrac{\mu_{j+1}\omega_{j+1}}{\mu_j\omega_j}$, $F_j=S_j+p_jC_j$.

Покажемо що функції α_j, β_j та η_j є залежними. Оскільки шар з номером $n+1$ є абсолютно жорсткою півплощиною, то $\beta_{n+1}=0$. З рівності (27) при $j=n$ отримаємо:

$$\left(\operatorname{ch}2p_n-1\right)\alpha_n+\left(\operatorname{sh}2p_n+2p_n\right)\beta_n+$$
$$+\alpha_{T\,n}\,\mu_n\left(p_n\operatorname{sh}2p_n+\left(1-p_nr_n\right)\left(\operatorname{ch}2p_n-1\right)\right)\eta_n=0,$$

$$\beta_n=-\frac{\operatorname{ch}2p_n-1}{\operatorname{sh}2p_n+2p_n}\alpha_n-$$
$$-\frac{\alpha_{T\,n}\,\mu_n\left(p_n\operatorname{sh}2p_n+\left(1-p_nr_n\right)\left(\operatorname{ch}2p_n-1\right)\right)}{\operatorname{sh}2p_n+2p_n}\eta_n.\qquad(28)$$

Поклавши у формулах (23), (26) та (27) $j=n-1$, отримаємо представлення для α_n, β_n та η_n через α_{n-1}, β_{n-1} та η_{n-1}. Підставивши отримані вирази в (28), можна виразити β_{n-1} через α_{n-1} та η_{n-1}. Використовуючи формули (23), (26), (27) при $j=n-2$ та представлення β_{n-1} через α_{n-1} та η_{n-1}, можна показати, що β_{n-2} є лінійною комбінацією α_{n-2} та η_{n-2}. Діючи аналогічно, можна представити β_j у вигляді лінійної комбінації α_j та η_j. Отже, для шару з номером j мають місце співвідношення:

$$\beta_j=-A_j\,\alpha_j-B_j\,\eta_j.\qquad(29)$$

Функції A_j та B_j називатимемо функціями податливості термопружної основи з гладким контактом між шарами. Поклавши в останньому співвідношенні $j=n$ та порівнявши з рівністю (28), отримаємо:

$$A_n=\frac{\operatorname{ch}2p_n-1}{\operatorname{sh}2p_n+2p_n},$$
$$B_n=\frac{\alpha_{T\,n}\,\mu_n\left(p_n\operatorname{sh}2p_n+\left(1-p_nr_n\right)\left(\operatorname{ch}2p_n-1\right)\right)}{\operatorname{sh}2p_n+2p_n}.\qquad(30)$$

DOI 10.15588/1607-6885-2025-2-7

Побудуємо формули для обчислення функцій податливості шарів, що лежать вище n-го. Запишемо співвідношення (29) для шару з номером $j+1$:

$$\beta_{j+1} = -A_{j+1}\alpha_{j+1} - B_{j+1}\eta_{j+1}.$$

Застосовуючи формули (23) та (26) до попередньої рівності, матимемо:

$$\beta_{j+1} = -\frac{A_{j+1}}{2F_j}\Big(2p_j + \operatorname{sh}2p_j - \left(\operatorname{ch}2p_j - 1 - 2p_j^2\right)A_j\Big)\alpha_j + \left(\frac{A_{j+1}}{2F_j}\Big(\left(\operatorname{ch}2p_j - 1 - 2p_j^2\right)B_j + \alpha_{Tj}\mu_j r_j\left(2p_j^2 - \operatorname{ch}2p_j + 1\right)\Big) - B_{j+1}\left(C_j - r_jS_j\right)\right)\eta_j. \quad (31)$$

З іншого боку, використовуючи формули (27) та (29), одержимо:

$$\beta_{i+1} = d_j\Big(\left(\operatorname{ch}2p_j - 1 - A_j\left(\operatorname{sh}2p_j + 2p_j\right)\right)\alpha_j + \Big(-\left(\operatorname{sh}2p_j + 2p_j\right)B_j + \alpha_{Tj}\mu_j\left(p_j\operatorname{sh}2p_j + \left(1 - p_jr_j\right)\left(\operatorname{ch}2p_j - 1\right)\right)\Big)\eta_j\Big). \quad (32)$$

Прирівнявши коефіцієнти при α_j та η_j в рівностях (31) та (32) та виразивши A_j через A_{j+1}, а B_j через B_{j+1}, отримаємо:

$$A_j = \frac{d_j\left(\operatorname{ch}2p_j - 1\right) + \left(\operatorname{sh}2p_j + 2p_j\right)A_{j+1}}{d_j\left(\operatorname{sh}2p_j + 2p_j\right) + \left(\operatorname{ch}2p_j - 1 - 2p_j^2\right)A_{j+1}}, \quad (33)$$

$$B_j = \frac{\alpha_{Tj}\mu_j d_j\left(p_j\operatorname{sh}2p_j + \left(1 - p_jr_j\right)\left(\operatorname{ch}2p_j - 1\right)\right)}{d_j\left(\operatorname{sh}2p_j + 2p_j\right) + \left(\operatorname{ch}2p_j - 1 - 2p_j^2\right)A_{j+1}} - \frac{\alpha_{Tj}\mu_j A_{j+1}r_j\left(2p_j^2 - \operatorname{ch}2p_j + 1\right)}{d_j\left(\operatorname{sh}2p_j + 2p_j\right) + \left(\operatorname{ch}2p_j - 1 - 2p_j^2\right)A_{j+1}} + \frac{2F_jB_{j+1}\left(C_j - r_jS_j\right)}{d_j\left(\operatorname{sh}2p_j + 2p_j\right) + \left(\operatorname{ch}2p_j - 1 - 2p_j^2\right)A_{j+1}}. \quad (34)$$

Зазначимо, що при відсутності теплових полів отримані формули з точністю до позначень співпадають з формулами методу функцій податливості для пружних багатошарових основ, що знаходяться лише під дією механічних навантажень.

Результати досліджень

Чисельні результати проведено для двошарової основи. Крайові умови: $T_1(x,0) = \begin{cases} T_0, & |x| \le 1\text{ м},\\ 0, & |x| > 1\text{ м},\end{cases}$ $T_0 = 470$ К, $\sigma_{z1}(x,0) = 0$, $\tau_{xz1}(x,0) = 0$, $T_2(x,h_2) = 0$, $\tau_{xz2}(x,h_2) = 0$. На рис. 2 та рис. 3 зображено графіки розподілів нормальних напружень $\tilde{\sigma}_{z1}(x,z) = \sigma_{z1}(x,z)/\mu_1\alpha_{T1}T_0$ при $z = h_1/2$ та $z = h_1$ для двошарових основ, шари яких виготовлені зі сталі та бетону, при фіксованій товщині сталевого шару 0,2 м. Характеристики бетону: $E_1 = 30\cdot10^9$ Па, $\nu_1 = 0{,}2$, $k_{T1} = 1{,}2$ Вт/м·К, $\tilde{\alpha}_{T1} = 12\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$; характеристики сталі: $E_2 = 200\cdot10^9$ Па, $\nu_2 = 0{,}3$, $k_{T1} = 50$ Вт/м·К, $\tilde{\alpha}_{T1} = 13\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$. На рис. 4 зображено графіки розподілів нормальних напружень $\tilde{\sigma}_{z1}(x,h_1/2)$ та $\tilde{\sigma}_{z1}(x,h_1)$ в точках двошарової основи, яка складається з двох шарів бетону товщиною по 0,5 м. А на рис. 5 зображено розподіли $\tilde{\sigma}_{z1}(x,h_1/4)$ та $\tilde{\sigma}_{z1}(x,h_1/2)$ для бетонного шару товщини 1 м, що лежить на абсолютно жорсткій півплощині, за крайових умов $T_1(x,0) = \begin{cases} T_0, & |x| \le 1\text{ м},\\ 0, & |x| > 1\text{ м},\end{cases}$ $T_0 = 470$ К, $\sigma_{z1}(x,0) = 0$, $\tau_{xz1}(x,0) = 0$, $T_1(x,h_1) = 0$, $\tau_{xz1}(x,h_1) = 0$.

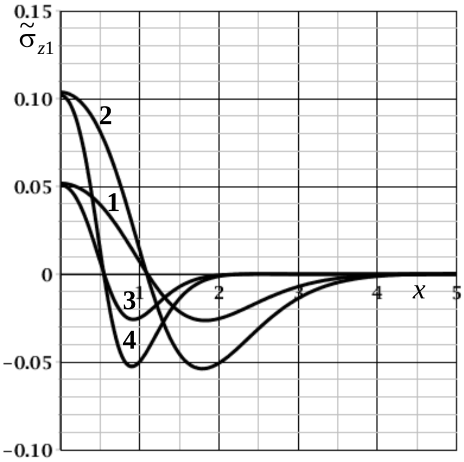

Рисунок 2. Розподіли нормальних напружень в двошаровій основі бетон-сталь:

1 – $\tilde{\sigma}_{z1}(x,h_1/2)$, $h_1 = 1$ м, $h_2 = 0{,}2$ м;

2 – $\tilde{\sigma}_{z1}(x,h_1)$, $h_1 = 1$ м, $h_2 = 0{,}2$ м;

3 – $\tilde{\sigma}_{z1}(x,h_1/2)$, $h_1 = 0{,}5$ м, $h_2 = 0{,}2$ м;

4 – $\tilde{\sigma}_{z1}(x,h_1)$, $h_1 = 0{,}5$ м, $h_2 = 0{,}2$ м

DOI 10.15588/1607-6885-2025-2-7

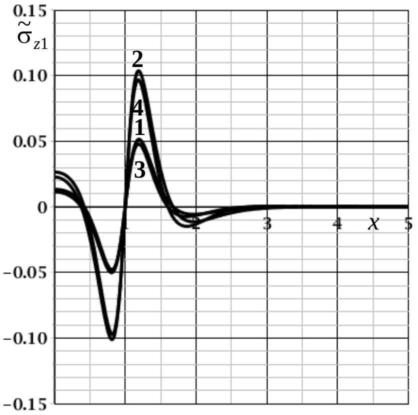

Рисунок 3. Розподіли нормальних напружень в двошаровій основі сталь-бетон:

1 – $\tilde{\sigma}_{z1}(x, h_1/2)$, $h_1 = 0{,}2$ м, $h_2 = 1$ м;

2 – $\tilde{\sigma}_{z1}(x, h_1)$, $h_1 = 0{,}2$ м, $h_2 = 1$ м;

3 – $\tilde{\sigma}_{z1}(x, h_1/2)$, $h_1 = 0{,}2$ м, $h_2 = 0{,}5$ м;

4 – $\tilde{\sigma}_{z1}(x, h_1)$, $h_1 = 0{,}2$ м, $h_2 = 0{,}5$ м

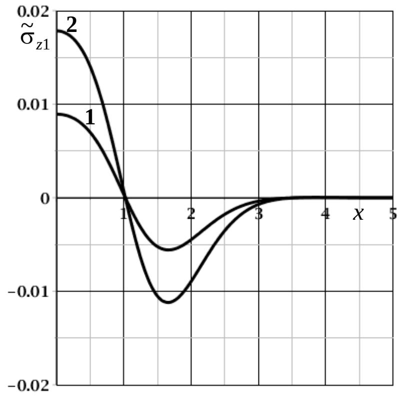

Рисунок 4. Розподіли нормальних напружень в двошаровій основі бетон-бетон:

1 – $\tilde{\sigma}_{z1}(x, h_1/2)$, $h_1 = 0{,}5$ м, $h_2 = 0{,}5$ м;

2 – $\tilde{\sigma}_{z1}(x, h_1)$, $h_1 = 0{,}5$ м, $h_2 = 0{,}5$ м

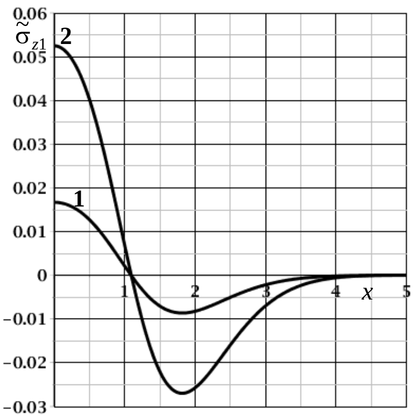

Рисунок 5. Розподіли нормальних напружень в точках одношарової основи:

1 – $\tilde{\sigma}_{z1}(x, h_1/4)$, $h_1 = 1$ м; 2 – $\tilde{\sigma}_{z1}(x, h_1/2)$, $h_1 = 1$ м

Обговорення

Для розглянутих типів основ спостерігається зростання нормальних напружень з ростом z. Для композиту бетон-сталь зменшення товщини верхнього шару призводить до зменшення нормальних напружень в точках, що знаходяться під областю дії теплового навантаження, при віддаленні від цих точок спостерігається зворотня картина. Аналізуючи рис. 3, приходимо до висновку, що зміна товщини нижнього шару, що виготовлений з бетону, майже не впливає на розподіл напружень в точках верхнього шару. Порівняння розподілів нормальних напружень, що зображені на рис. 4 та рис. 5, дозволяє зробити такий висновок: заміна двошарової основи, шари якої виготовлені з однакових матеріалів (бетон), з гладким контактом між шарами на одношарову основу, виготовлену з такого ж матеріалу, суттєво впливає на розподіли нормальних напружень, зокрема така заміна призводить до значного збільшення нормальних напружень.

Із аналізу отриманих розподілів видно, що при віддаленні від зони дії теплового навантаження напруження прагнуть до нуля, що узгоджується з фізичним сенсом.

Висновки

Запропоновано аналітичний підхід розв'язання двовимірної задачі термопружності для однорідної багатошарової основи з гладким контактом між шарами. Аналітичний розв'язок задачі отримано у вигляді інтегралів Фур'є.

Термо-напружено-деформований стан шару подано через систему допоміжних функцій, що забезпечує ефективну математичну модель для подальших досліджень. Побудовано рекурентні співвідношення між зазначеними допоміжними функціями сусідніх шарів, що дало змогу узагальнити алгоритм на істотно багатошарові основи. Встановлено, що допоміжні функції одного шару не є незалежними, а пов'язані лінійними залежностями, коефіцієнти яких – функції податливості. Отримано рекурентні співвідношення між цими функціями у випадку гладкого контакту між шарами.

Робота методу продемонстрована на прикладі двошарової конструкції зі сталевим та бетонним шарами, яка лежить на абсолютно жорсткій півплощині. Визначено розподіли нормальних напружень у верхньому шарі та оцінено вплив теплового навантаження. Чисельні приклади підтвердили, що врахування термопружних властивостей матеріалів суттєво впливає на характер формування напружень у шарах конструкції.

Список літератури

1. Блажевський С. Г. Термопружний стан багатошарових симетричних тіл / С. Г. Блажевський, М. П. Ленюк. – К. : Ін-т математики НАН України, 2000. – 130 с.

2. Процюк Б. В. Тривимірні статичні та квазістатичні задачі термопружності для шаруватих тіл з плоскопаралельними границями / Б. В. Процюк // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2003. – Т. 46, № 2. – С. 96–106.

DOI 10.15588/1607-6885-2025-2-7

3. Процюк Б. В. Визначення статичного термопружного стану шаруватих термочутливих плити, циліндра і кулі / Б. В. Процюк // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2021. – Т. 64, № 1. – С. 87–106. DOI: http://doi.org/10.15407/mmpmf2021.64.1.87-106.

4. Кушнір Р. М. Аналітично-числове визначення статичного термопружного стану плоских багатошарових термочутливих структур / Р. М. Кушнір, І. М. Махоркін, М. І. Махоркін // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2019. – Т. 62, № 4. – С. 131–140.

5. Abdoun F. Nonlinear thermal analysis of multilayered composite and FGM plates with temperature-dependent properties based on an asymptotic numerical method / F. Abdoun, L. Azrar // Archive of Applied Mechanics. – 2021. – Vol. 91. – P. 4361–4387. DOI: https://doi.org/10.1007/s00419-021-01999-x

6. Lee J. An asymptotic method-based composite plate model considering imperfect interfaces / J. Lee, J. S. Kim, M. Cho // International Journal of Solids and Structures. – 2020. – Vol. 190. – P. 258–270. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.11.012

7. Pan E. Thermoelastic deformation of a transversely isotropic and layered half-space by surface loads and internal sources / E. Pan // Physics of the Earth and Planetary Interiors. – 1990. – Vol. 60, No 1–4. – P. 254–264. DOI: https://doi.org/10.1016/0031-9201(90)90266-Z

8. Термопружне деформування шаруватого покриття на вгнутій ділянці дороги / В. В. Гайдайчук, О. О. Густєлєв, А. В. Радкевич та ін. // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2019. – Вип. 102. – С. 180–190.

9. Козуб Г.О. Моделювання теплових процесів у шаруватих тілах / Г.О. Козуб, Ю. Г. Козуб // Геотехнічна механіка. – 2020. – № 151. – С. 234–244. DOI: https://doi.org/10.15407/geotm2020.151.234

10. Finite element analysis of composite laminated plate subjected to mechanical-thermal loadings using refined high-order theory / X. Liu, J. Ji, L. Liu et al. // Chinese Quarterly of Mechanics. – 2021. – Vol. 42, No 1. – P. 27–36.

11. Guo S. Thermal-elastic analysis of laminated plates based on the incompatible generalized partial mixed method / S. Guo, S. Gao, Y. Wang // Heliyon. – 2023. – Vol. 9, No 4. – e14882. DOI: https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e14882

12. Semi-analytical solution for mixed supported and multilayered two-dimensional thermo-elastic quasicrystal plates with interfacial imperfections / X. Feng, L. Zhang, H. Zhang, Y. Gao // Journal of Thermal Stresses. –2023. – Vol. 46, No 2. – P. 91–116. DOI: https://doi.org/10.1080/01495739.2022.2149645

13. New analytical model for multi-layered composite plates with imperfect interfaces under thermomechanical loading / M. Shaat, X. L. Gao, A. Battentier, N. Massué // Acta Mechanica. – 2024. – Vol. 35. – P. 7083–7120. DOI: https://doi.org/10.1007/s00707-024-04028-4

14. Marchuk A. V. Analytical Solution of the Problem on the Thermally Stressed State of Composite Plates with Rigid and Sliding Contacts Between Layers Based on the 3D Elasticity Theory / A. V. Marchuk, Y. K. Putvinskayte // Mechanics of Composite Materials. – 2019. – Vol. 55. – P. 155–170. DOI: https://doi.org/10.1007/s11029-019-09801-4

15. Величко І. Г. Плоска термопружна деформація багатошарової основи / І. Г. Величко, І. Г. Ткаченко // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 2004. – Вип. 8. – Т. 1. – С. 154–161.

16. Antonenko N. Plane Thermoelastic Deformation of a Multilayer Foundation with Non-Ideal Thermal Contact between its Layers / N. Antonenko, I. Tkachenko // Materials Science Forum. – 2019. – Vol. 968. – P. 486–495. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.968.4861.

Одержано 10.05.2025

TWO-DIMENSIONAL THERMOELASTIC PROBLEM FOR A MULTILAYERED FOUNDATION WITH SMOOTH CONTACT BETWEEN LAYERS

Nina Antonenko — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, National University Zaporizhzhia Polytechnic, Zaporizhzhia, Ukraine, *e-mail: antonenkonina.ua@gmail.com*, ORCID: 0000-0002-0427-6499

Iryna Tkachenko — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, Ukraine, *e-mail: tig.phd81@gmail.com*, *ORCID:* 0000-0002-4232-2484

Purpose. *To obtain analytical expressions describing the thermo-stress-strain state of a layered plate with smooth interlayer contact, resting on a perfectly rigid half-plane, and to illustrate the influence of thermal loads on the stress distribution at its points.*

Research methods. *The Fourier integral transform and the compliance function method are used to solve the problem.*

Results. *An analytical solution is presented for the two-dimensional thermoelastic problem of a single homogeneous layer with boundaries free of shear stresses. The solution is constructed using the Fourier integral transform, which reduces the order of the problem and converts the governing partial differential equations into ordinary differential equations. The components of the thermo-stress-strain state of the layer are represented as combinations of auxiliary functions: normal stresses, vertical displacements, temperature, and heat flux at the upper boundary of the layer. Recurrent relations are obtained between the auxiliary functions of adjacent layers in a multilayered thermoelastic foundation.*

DOI 10.15588/1607-6885-2025-2-7

It is shown that the auxiliary functions of an individual layer are related to each other by linear dependencies, the coefficients of which are referred to as compliance functions. Based on the derived recurrence relations, compliance functions are obtained for the multilayered foundation under the assumption of smooth contact between the layers. As an example of practical application of the proposed method, a two-layer foundation consisting of concrete and steel layers resting on a perfectly rigid half-plane is considered. For this model, the distributions of normal stresses in the upper layer are determined, and the influence of thermal loading on their variation is analyzed. The results demonstrate that accounting for the thermoelastic properties of materials significantly affects the stress formation within the layers of the foundation. The obtained findings may be used in the design of multilayer structures, particularly the foundations of transport infrastructure and buildings subjected to variable thermal fields.

Scientific novelty*. The compliance function method is extended to the two-dimensional thermoelastic problem of a layered foundation with smooth contact between layers.*

Practical value*. The derived formulas can be used for the strength analysis of building foundations, industrial floor slabs, as well as airfield and pavement structures subjected to high-temperature conditions. The results may also serve as benchmark solutions for validating the proposed problem when solved using alternative methods.*

Key words*: multilayer foundation, temperature, stress, Fourier integral transform, compliance functions.*

References

1. Blazhevs'kyj, S. G., & Lenjuk, M. P. (2000). Termopruzhnyj stan bagatosharovyh symetrychnyh til. Kyiv: In-t matematyky NAN Ukrai'ny.

2. Procjuk, B. V. (2003). Tryvymirni statychni ta kvazistatychni zadachi termopruzhnosti dlja sharuvatyh til z ploskoparalel'nymy granycjamy. Matematychni metody ta fizyko-mehanichni polja, 46(2), 96–106.

3. Procjuk, B. V. (2021). Vyznachennja statychnogo termopruzhnogo stanu sharuvatyh termochutlyvyh plyty, cylindra i kuli. Matematychni metody ta fizyko-mehanichni polja, 64(1), 87–106. https://doi.org/10.15407/mmpmf2021.64.1.87-106

4. Kushnir, R. M., Mahorkin, I. M., & Mahorkin, M. I. (2019). Analitychno-chyslove vyznachennja statychnogo termopruzhnogo stanu ploskyh bagatosharovyh termochutlyvyh struktur. Matematychni metody ta fizyko-mehanichni polja, 62(4), 131–140.

5. Abdoun, F., & Azrar, L. (2021). Nonlinear thermal analysis of multilayered composite and FGM plates with temperature-dependent properties based on an asymptotic numerical method. Archive of Applied Mechanics, 91, 4361–4387. https://doi.org/10.1007/s00419-021-01999-x

6. Lee, J., Kim, J. S., & Cho, M. (2020). An asymptotic method-based composite plate model considering imperfect interfaces. International Journal of Solids and Structures, 190, 258–270. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.11.012

7. Pan, E. (1990). Thermoelastic deformation of a transversely isotropic and layered half-space by surface loads and internal sources. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 60(1–4), 254–264. https://doi.org/10.1016/0031-9201(90)90266-Z

8. Gajdajchuk, V. V., Gustjeljev, O. O., Radkevych, A. V., Shevchuk, L. V., & Shljun’, N. V. (2019). Termopruzhne deformuvannja sharuvatogo pokryttja na vgnutij diljanci dorogy. Opir materialiv i teorija sporud, 102, 180–190.

9. Kozub, G. O., & Kozub, Ju. G. (2020). Modeljuvannja teplovyh procesiv u sharuvatyh tilah. Geotehnichna mehanika, (151), 234–244. https://doi.org/10.15407/geotm2020.151.234

10. Liu, X., Ji, J., Liu, L., Wang, Q., Zhou, Y., & Guo, L. (2021). Finite element analysis of composite laminated plate subjected to mechanical-thermal loadings using refined high-order theory. Chinese Quarterly of Mechanics, 42(1), 27–36.

11. Guo, S., Gao, S., & Wang, Y. (2023). Thermal-elastic analysis of laminated plates based on the incompatible generalized partial mixed method. Heliyon, 9(4), e14882. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e14882

12. Feng, X., Zhang, L., Zhang, H., & Gao, Y. (2023). Semi-analytical solution for mixed supported and multilayered two-dimensional thermo-elastic quasicrystal plates with interfacial imperfections. Journal of Thermal Stresses, 46(2), 91–116. https://doi.org/10.1080/01495739.2022.2149645

13. Shaat, M., Gao, X. L., Battentier, A., & Massué, N. (2024). New analytical model for multi-layered composite plates with imperfect interfaces under thermomechanical loading. Acta Mechanica, 35, 7083–7120. https://doi.org/10.1007/s00707-024-04028-4

14. Marchuk, A. V., & Putvinskayte, Y. K. (2019). Analytical solution of the problem on the thermally stressed state of composite plates with rigid and sliding contacts between layers based on the 3D elasticity theory. Mechanics of Composite Materials, 55, 155–170. https://doi.org/10.1007/s11029-019-09801-4

15. Velychko, I. G., & Tkachenko, I. G. (2004). Ploska termopruzhna deformacija bagatosharovoi’ osnovy. Visnyk Dnipropetrovs'kogo universytetu. Mehanika, 8(1), 154–161.

16. Antonenko, N., & Tkachenko, I. (2019). Plane thermoelastic deformation of a multilayer foundation with non-ideal thermal contact between its layers. Materials Science Forum, 968, 486–495. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.4861

DOI 10.15588/1607-6885-2025-2-7