

УДК 539.3

Андрій Пожуєв

канд. фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри фундаментальної та прикладної математики Запорізького національного університету, м. Запоріжжя, Україна, e-mail: scorpio6828@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4083-5139

Володимир Пожуєв

д-р фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного університету «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна, e-mail: pozhuevvi@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9163-7888

Олена Міхайлуца

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електроніки, інформаційних систем та програмного забезпечення Запорізького національного університету, м. Запоріжжя, Україна, e-mail: elenamikhaylutsa7@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2935-7997

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ОРТОГОНАЛЬНОЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ПРОГОНКИ ПРИ АНАЛІЗІ СТАЦІОНАРНИХ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ В НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУРАХ

**Мета роботи.** Розвиток чисельного алгоритму для розв'язання широкого кола задач стаціонарної динаміки про взаємодію пластин і циліндричних оболонок з пружними інерційними основами, механічні параметри яких змінюються по товщині за довільними неперервними або дискретними законами. Розв'язання отриманим алгоритмом конкретних задач і оцінка впливу змінності характеристик середовища на основні динамічні характеристики на прикладі трьох задач стаціонарної динаміки.

**Методи дослідження.** Для опису руху пластин і оболонок використовуються рівняння типу Тимошенко і рівняння, які базуються на гіпотезі Кірхгофа-Лява. Поведінка основи описується динамічними рівняннями теорії пружності в напруженнях, з яких з врахуванням змінності модуля Юнга і густини виведені рівняння у переміщеннях зі змінними коефіцієнтами, які в загальному випадку не вдається проінтегрувати аналітично. Для отриманої в результаті переходу до амплітуд і запису умов контакту між тонкостінною конструкцією і неоднорідною основою крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь застосовується метод ортогональної диференціальної прогонки, який на кожному кроці ортогоналізації використовує метод Рунге-Кутти для розв'язання задачі Коші. Таким чином, в задачах про вільні хвилі і власні частоти розв'язується задача на власні значення, а в задачах про рухомі навантаження треба використовувати зворотній хід і потім застосовувати метод суперпозиції. Для оцінки точності, а також оптимального вибору вузлів ортогоналізації в граничних випадках усіх розглянутих задач за умови однорідної основи знайдені аналітичні розв'язки і проведено порівняння результатів.

**Отримані результати.** Створено пакет прикладних програм для чисельного розв'язання крайових однорідних і неоднорідних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, який ґрунтується на методі ортогональної диференціальної прогонки. В даному дослідженні цей пакет застосовується для задач із трьох основних класів задач стаціонарної динаміки: про розповсюдження вільних хвиль в системі циліндрична оболонка – неоднорідний пружний заповнювач, про визначення власних частот в трьохшаровій циліндричній оболонці з неоднорідним середнім шаром і про рух нормального навантаження по пластині на неоднорідній за товщиною основі. В кожній задачі показано вплив неоднорідності основи на фазові швидкості, власні частоти, переміщення пластини. Перевірена за допомогою граничних переходів до відповідних однорідних матеріалів ефективність розробленої програми для більш складних практичних задач і зроблено рекомендації по використанню даного алгоритму для середовищ зі значною кількістю шарів.

**Наукова новизна.** Отримав розвиток для задач стаціонарної динаміки пластин і оболонок, які взаємодіють з тривимірним неоднорідним інерційним середовищем, алгоритм, який ґрунтується на методі ортогональної диференціальної прогонки. За його допомогою розв'язані три задачі з різних трьох класів даного розділу механіки деформівного твердого тіла. Вказані шляхи подальшого використання розробленого пакета на задачі таких класів.

**Практична цінність.** Розроблений пакет програм і отримані за його допомогою результати можуть використовуватися в практиці роботи проектних організацій, які займаються розробкою елементів нової техніки, будівництва, прокладкою сучасних автомагістралей. Крім того, математична частина даної публікації може бути корисною не лише в механіці деформівного твердого тіла, а і в тих розділах науки, де виникають красиві задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь.

**Ключові слова:** диференціальні рівняння, ортогональна прогонка, вільні хвилі, власні частоти, перетворення Галілея, рухома система координат.

## Вступ

Серед задач механіки твердого деформівного тіла значне місце займають так звані стаціонарні динамічні задачі, коли час присутній неявним способом. До цього класу належать задачі про власні (вільні) та вимушені коливання елементів конструкцій, коли час виключається із розгляду шляхом переходу до амплітуд шуканих переміщень та напружень, задачі про розповсюдження вільних хвиль в пластинах, оболонках та пружному середовищі, а також широкий клас задач про дію рухомого навантаження вздовж елементів конструкцій, коли у випадку необмеженої довжини конструкції у напрямку руху сили і сталої швидкості самого руху час виключається шляхом застосування перетворення Галілея і розгляду картини напружено-деформованого стану в рухомій системі координат. З математичної точки зору вказані дії приводять до того, що для амплітуд або трансформант шуканих величин у випадку застосування інтегральних перетворень ми приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь з відповідними граничними умовами, тобто до крайових задач. Навіть у випадку, коли розглядаються матеріали з незмінними механічними характеристиками, аналітичні методи розв'язання таких систем не завжди працюють. Але на практиці досить часто зустрічаються ситуації, коли з технологічних причин необхідно, щоб модуль Юнга або густина матеріалу були різними в різних точках конструкції і тоді ми будемо мати справу із системою диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. З точки зору механіки, це означає, що в різних точках системи частота коливань і швидкість розповсюдження хвиль будуть залежати від координат відповідної точки. Зрозуміло, що аналітично розв'язати задачу в такому випадку при довільних законах зміни характеристик матеріалу неможливо і тому доводиться застосовувати чисельні підходи, орієнтовані на використання ЕОМ.

Найчастіше в таких випадках застосовуються методи, що пов'язані з дискретизацією області, в якій аналізується стаціонарний динамічний процес. Історично першими в цьому напрямку були підходи, що ґрунтуються на методі скінченних різниць, пізніше почали застосовуватися методи скінченних, а потім і граничних елементів. Більше обґрунтованими, в тому сенсі, що доведена їх збіжність, є підходи, які побудовані на методі Рунге-Кутта для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Зокрема одним із розвитків даного напрямку є запропонований Годуновим метод ортогональної диференціальної прогонки, який в даній публікації застосовується для розв'язання задач про вільні хвилі, власні коливання, а також дію рухомого навантаження. Зазначимо, що перші дві задачі зводяться до знаходження власних чисел для системи диференціальних рівнянь з нульовою правою частиною, а в третій задачі система диференціальних рівнянь є неоднорідною.

## Мета роботи

Метою роботи є розробка пакету прикладних програм для реалізації на ЕОМ методу ортогональної диференціальної прогонки і ілюстрація можливостей підходів, які базуються на цьому методі, для задач стаціонарної динаміки, зокрема в задачах контакту циліндричних оболонок з неоднорідним за товщиною заповнювачем, в задачах про розповсюдження вільних хвиль в циліндричних оболонках із пружним заповнювачем та трьохшарових оболонках, в яких несучі шари розділені шаром зі змінними механічними характеристиками, а також для розрахунку напружено – деформованого стану пластини, яка лежить на пружному шарі, модуль зсуву якого і густина змінюються з глибиною, і по якій зі сталою швидкістю рухається нормальне навантаження. Для тестування запропонованого підходу, а також оптимального підбору вузлів ортогоналізації в граничних випадках усіх задач, коли механічні параметри матеріалу не залежать від координат, поряд з результатами на основі методу ортогональної диференціальної прогонки отримані аналітичні розв'язки задач і проведені порівняння результатів двох підходів. Кінцевою метою дослідження будуть рекомендації по можливостях і границях застосування запропонованого алгоритму розв'язання задач таких типів.

## Матеріал і методика досліджень

Зазначимо, що для застосування методу ортогональної диференціальної прогонки у всіх задачах необхідно попередньо перейти до крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, яка у випадку з неоднорідними граничними умовами, коли на систему діє рухоме навантаження, у векторній формі запишеться так

$$\frac{d\bar{X}}{dx} = A(\bar{r})\bar{X}, \quad B\bar{X}(a) = \bar{d}_1, \quad C\bar{X}(b) = \bar{d}_2, \quad (1)$$

де  $\bar{X}$  –  $n$ -мірний вектор розв'язання, а матриці  $A$ ,  $B$ ,  $C$  залежать від характеру задачі, яка розглядається, причому  $A$  – це матриця коефіцієнтів системи диференціальних рівнянь, яка у випадку неоднорідності матеріалу залежить від положення точки на тілі,  $\bar{r}$  – радіус-вектор точки неоднорідного матеріалу, матриці  $B$  і  $C$  мають своїми елементами сталі значення, які виражаються через параметри шарів, з якими контактує неоднорідний матеріал, вектори  $\bar{d}_1$  і  $\bar{d}_2$  описують умови на границі контакту, інтервал  $[a, b]$  – область зміни  $x$  або інтервал інтегрування систем. Зазначимо, що в задачах про власні коливання і про розповсюдження вільних хвиль треба в (1) покласти  $\bar{d}_1 = \mathbf{0}$  і  $\bar{d}_2 = \mathbf{0}$ , тобто розглядати однорідну краєву задачу.

Інтервал інтегрування  $[a, b]$  розбиваємо на  $n$  підінтервалів вузлами ортогоналізації

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b.$$

Шукаємо систему лінійно незалежних векторів  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ , які задовільняють систему  $B\bar{X}_j(a) = 0, (j=1,2)$  і вектор  $\bar{X}_3$ , який знаходиться із умови  $B\bar{X}_3(a) = d_1$ .

Після цього методом Рунге-Кутта знаходимо розв'язання наступних задач Коші: у вузлі  $x_1$

$$\frac{d\bar{X}_j}{dx} = A(\bar{r})\bar{X}_j, \quad \bar{X}_j(x_0) = \bar{X}_j, \quad (2)$$

де в якості початкових значень приймаються знайдені вище із умов при  $x = a$  вектори.

Отримані в результаті інтегрування задачі Коші (2) вектори  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$  ортогоналізуються і нормуються, що підвищує точність розв'язання. Беручи ці вектори в якості початкових даних для задач Коші у вузлі  $x_2$ , знайдемо розв'язання останніх в наступному вузлі і так далі. Таким шляхом ми отримаємо ортогональну систему векторів  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$  в кінці відрізка інтегрування, тобто в точці  $x_n = b$ . Довільне розв'язання крайової задачі, яке задовольняє умовам при  $x = a$ , приймає при  $x = b$  значення, яке можна подати у такому вигляді

$$\bar{X}(b) = \bar{X}_3 + \alpha_1 \bar{X}_1 + \alpha_2 \bar{X}_2. \quad (3)$$

При цьому коефіцієнти  $\alpha_1, \alpha_2$  повинні бути визначені із умови

$$c\bar{X}(b) = \bar{d}_2. \quad (4)$$

Після того, як  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  знайдені із умови (4), розв'язання крайової задачі (1) у вузлах розв'язання, які можуть не співпадати із обраними вище вузлами ортогоналізації, знаходиться інтегруванням системи

$$\frac{d\bar{X}}{dx} = A(\bar{r})\bar{X} \quad (5)$$

з початковою умовою  $\bar{X} = \bar{X}(b)$  методом Рунге – Кутта.

Зазначимо, що коли розв'язуються задачі на власні значення (коливання і вільні хвилі), то в такому випадку усі три вектори  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$  знаходяться із системи  $B\bar{X}_j(a) = 0 \quad j=1, 2, 3$  і тоді, подаючи розв'язування при  $x = b$ , у вигляді (3), приходимо до системи (4) із нульовою правою частиною, із умови нетривіальності розв'язків якої отримуємо характеристичне рівняння у неявному вигляді. Зворотній хід (інтегрування системи (5)) при розв'язанні задачі на власні значення не виконується.

При реалізації описаного алгоритму на ЕОМ крім головної програми використовувалися три підпрограми: «NAFSIL» (знаходження фундаментальної системи розв'язків однорідної  $B\bar{X}(a) = 0$  і частинного розв'язку неоднорідної  $B\bar{X}(a) = \bar{d}_1$  систем методом оптимального виключення), процедура «ORTMATR» (ортогоналізація системи лінійно-незалежних векторів методом відображень) і підпрограма метода Рунге – Кутта (розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь).

Спочатку покажемо, як за допомогою даного методу досліджується питання про розповсюдження віссиметричних вільних хвиль в циліндричній оболонці необмеженої довжини, всередині якої знаходиться пружний заповнювач, механічні характеристики якого змінюються за товщиною.

Рух оболонки будемо описувати рівняннями, які враховують деформації зсуву і інерцію обертання елемента (типу Тимошенко), які доповнені нормальною реакцією з боку заповнювача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{v}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = \rho \frac{1-v^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$k^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \right) - \frac{2}{1-v} \left( \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{2(1+v)}{Eh} q_r = \frac{2(1+v)\rho}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$k^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha_x \right) + \frac{h^2}{6(1-v)} \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial x^2} = \frac{(1+v)h^2 \rho}{6E} \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Тут  $u, w$  – переміщення точки серединної поверхні оболонки в осьовому і радіальному напрямках,  $\alpha_x$  – кут повороту нормалі до серединної поверхні,  $E, \rho$  – модуль Юнга і густина матеріалу оболонки,  $h, R$  – товщина і радіус оболонки,  $k^2$  – коефіцієнт Тимошенко,  $q_r$  – радіальна реакція з боку заповнювача.

Рух заповнювача описується точними рівняннями теорії пружності, які в напруженнях для віссиметричної задачі записуються так:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \rho_c \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \sigma_{rx} = \rho_c \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},$$

де згідно з законом Гука і співвідношеннями Коші виконуються такі залежності

$$\sigma_{rr} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{\theta\theta}$$

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{rx} = \mu \varepsilon_{rx} \quad (8)$$

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{xr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x}, \quad e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{rr}.$$

Будемо вважати, що механічні характеристики заповнювача змінюються за його товщиною згідно з наступними законами

$$E = E_0 f_1(r), \quad \rho = \rho_0 f_2(r). \quad (10)$$

При цьому приймаємо умови, що функція  $f_2(\mathbf{r})$  може мати довільний вигляд, а відносно функції  $f_1(\mathbf{r})$  припускається, що вона диференційована і не має нульового значення при усіх значеннях  $r$ , які вона приймає в усіх точках заповнювача.

Враховуючи вирази (10) в залежностях (8) і підставляючи після цього (8) і (9) в рівняння (7), отримаємо наступні рівняння руху заповнювача в переміщеннях

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial e}{\partial r} + 2\mu\frac{\partial w_\theta}{\partial x} + \frac{d\lambda}{dr}e + 2\frac{d\mu}{dr}\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial e}{\partial x} - 2\mu\frac{1}{r}(rw_\theta) + \frac{d\mu}{dr}\left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x}\right) &= \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ e = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad 2w_\theta &= \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r}. \end{aligned} \quad (11)$$

Зазначимо, що у випадку однорідного заповнювача у формулах (10)  $f_1 = f_2 = 1$  і тоді рівняння (11) переходять у відомі рівняння Ламе.

Якщо вважати заповнювач пустотілим з радіусом внутрішньої поверхні рівним  $a$ , а також, що контакт заповнювача з оболонкою відбувається по її серединній поверхні, тоді у випадку ковзного контакту граничні умови для заповнювача записуються у такому вигляді

$$\text{при } \mathbf{r} = \mathbf{R} \quad \mathbf{u}_r = \mathbf{w}, \quad \sigma_{rr} = -q_r, \quad \sigma_{rx} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

$$\text{при } \mathbf{r} = \mathbf{a} \quad \sigma_{rr} = \mathbf{0}, \quad \sigma_{rx} = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Розглядаючи розповсюдження вздовж системи циліндрична оболонка – неоднорідний за товщиною пружний заповнювач поздовжньо-поперечних хвиль, розв'язання рівнянь (6), (11) шукаємо в такому вигляді

$$\{\bar{U}, \bar{u}\} = \{\bar{U}_0, \bar{u}_0\} \cdot \exp(i(\xi x - pt)), \quad (14)$$

де  $\bar{U}(u_0, w_0, \alpha_0)$  – вектор відмінних від нуля амплітуд переміщень і кутів повороту точок серединної поверхні оболонки,  $\bar{u}_0(U(r), W(r))$  – вектор амплітуд переміщень точок заповнювача

$$\xi = \frac{2\pi}{\lambda_f}, \quad p = c_f \xi,$$

де  $\lambda_f, c_f$  – довжина і фазова швидкість хвилі.

Якщо підставити подання (14) у рівняння (6), то ми отримаємо, з врахуванням аналітичного виразу для  $q_r$ , систему алгебраїчних рівнянь, яка дозволяє пов'язати амплітуду радіального зусилля, яке передається на заповнювач з боку оболонки, через радіальне переміщення оболонки і прийти до наступної залежності

$$\begin{aligned} q_{r0} &= \frac{E\aleph^2}{2(1+\nu)} F(\eta) \frac{W_0}{h} \\ F(\eta) &= \left( k^2 - \frac{k^4}{a^2} - \frac{2}{3} C_*^2 \right) \eta^2 + \frac{2}{1-\nu} \left( 1 - \frac{\nu^2}{a_1} \right) \end{aligned}$$

$$a_1 = 1 - \frac{1-\nu}{3} C_*^2$$

$$a_2 = k^2 + \frac{\aleph^2 \eta^2}{18} \left( \frac{3}{1-\nu} - C_*^2 \right)$$

$$\eta = \xi \frac{h}{x}, \quad \aleph = \frac{h}{R}, \quad C_* = C_f \left( \frac{3\rho}{2G} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Ця залежність потрібна нам, щоб переписати у переміщеннях перші дві граничні умови в (12) і тепер загалом з врахуванням (14) граничні умови записуються у такому вигляді

$$\text{при } r_* = \frac{r}{R} = 1$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\nu_s}{1-\nu_s} + \frac{F(\eta)}{2(1+\nu)\nu_s^* E_s^* f_1(1)} \right) W - \frac{\nu_s \eta}{1-\nu_s} U + \frac{dW}{dr_*} &= 0 \\ \eta W + \frac{dU}{dr_*} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{при } r_* = \varepsilon = \frac{a}{R}$$

$$\eta W + \frac{dU}{dr_*} = 0$$

$$\frac{\nu_s}{(1-\nu_s)\varepsilon} W - \frac{\nu_s \eta}{1-\nu_s} U + \frac{dW}{dr_*} = 0. \quad (17)$$

Якщо підставити вирази (14) в рівняння (11), тоді для амплітуд переміщень точок заповнювача прийдемо до такої системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{dr_*^2} + \varphi_1(r_*) \frac{dW}{dr_*} + \varphi_2(r_*) W - \frac{\eta}{2(1-\nu_s)} \frac{dU}{dr_*} - \\ - \frac{\nu_s \eta}{1-\nu_s} f_3(r_*) U = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 U}{dr_*^2} + \varphi_1(r_*) \frac{dU}{dr_*} + \varphi_2(r_*) U + \frac{\eta}{(1-2\nu_s)} \frac{dW}{dr_*} + \eta \varphi_4(r_*) W = 0$$

$$\varphi_1(r_*) = \frac{1}{r_*} + f_3(r_*), \quad f_3(r_*) = \frac{d}{dr_*} \ln f_1(r_*) \quad (18)$$

$$\varphi_2(r_*) = \frac{1}{r_*} \left( \frac{\nu_s r_*}{1-\nu_s} f_3(r_*) - 1 \right) - \frac{1-2\nu_s}{2(1-\nu_s)} \eta^2 + \alpha^2 \eta^2 \frac{f_2(r_*)}{f_1(r_*)}$$

$$\varphi_3(r_*) = \left( \beta^2 \frac{f_2(r_*)}{f_1(r_*)} - \frac{2(1-\nu_s)}{1-2\nu_s} \right) \eta^2$$

$$\varphi_4(r_*) = f_1(r_*) + \frac{2\nu_s}{(1-2\nu_s)r_*}.$$

Тепер побудова дисперсійної залежності, тобто залежності фазової швидкості від хвильового числа  $\eta$ , з математичної точки зору зводиться до визначення власних значень для крайової задачі (16)–(18) з однорідними граничними умовами. Зрозуміло, що оскільки

тут ми маємо справу з диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами, то у випадку довільних функцій  $f_1(r)$  і  $f_2(r)$  у формулах (10) неможливо отримати аналітичний розв'язок даної задачі. Але тоді на допомогу приходить метод ортогональної диференціальної прогонки, який описаний на початку даної статті, причому у формулі (1) треба покласти  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 0$ , перейти за стандартною методикою від системи (18) до системи чотирьох диференціальних рівнянь першого порядку і тоді елементи матриць А, В і С у формулі (1) мають такий вигляд

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= a_{12} = a_{14} = 0, & a_{13} &= 1 \\
 a_{21} &= a_{22} = a_{23} = 0, & a_{24} &= 1 \\
 a_{31} &= -\varphi_2(r_*), & a_{32} &= \frac{v_s}{1-v_s} f_3(r_*), & a_{33} &= -\varphi_1(r_*), \\
 a_{34} &= \frac{\eta}{2(1-v_s)}, & a_{41} &= -\eta\varphi_4(r_*), & a_{42} &= -\varphi_3(r_*) \\
 a_{43} &= -\frac{\eta}{1-2v_s}, & a_{44} &= -\varphi_1(r_*) \\
 b_{11} &= \frac{v_s}{1-v_s} + \frac{F(\eta)}{2(1+v_s)v_s^* E_s^* f_1(1)}, \\
 b_{12} &= -\frac{v_s \eta}{1-v_s}, & b_{13} &= 1, & b_{14} &= 0 \\
 b_{21} &= \eta, & b_{22} &= 0, & b_{23} &= 0, & b_{24} &= 1 \\
 c_{11} &= \frac{v_s}{1-v_s}, & c_{12} &= -\frac{v_s \eta}{1-v_s} \varepsilon, & c_{13} &= \varepsilon, & c_{14} &= 0 \\
 c_{21} &= \eta, & c_{22} &= 0, & c_{23} &= 0, & c_{24} &= 1.
 \end{aligned}$$

Крайова задача (1) з виписаними тут елементами матриць А, В і С розв'язується методом ортогональної диференціальної прогонки, що дозволяє отримати дисперсійне рівняння у неявному вигляді і побудувати залежності фазової системи оболонка – неоднорідний заповнювач від хвильового числа. Зазначимо окремо, що мова йде не про швидкості в матеріалі оболонки чи заповнювача окремо, а саме швидкості в такій складеній з двох тіл системі.

Чисельні результати отримані при таких значеннях параметрів задачі  $\varkappa = 0,02$ ,

$$v = v_s = 0,3, k^2 = \frac{2}{3}, \varepsilon = 0,6, E_s^* = \frac{E_0}{E \varkappa} = 0,8, \rho_s^* = \frac{\rho_0}{\rho \varkappa} = 1.$$

Розглянуті два закони зміни параметрів заповнювача за товщиною, а саме степеневий, коли

$$f_1(r_*) = (1 + \theta r_*)^n, \quad f_2(r_*) = (1 + \gamma r_*)^m \quad (19)$$

а також експоненціальний, коли

$$f_1(r_*) = e^{k_1 r_*}, \quad f_2(r_*) = e^{k_2 r_*} \quad (20)$$

Попередньо, в якості тесту, за розробленим пакетом прикладних програм розглянуто частинний випадок, коли  $f_1(r_*) = 1$ ,  $f_2(r_*) = 1$ , тобто заповнювач вва-

жається однорідним. Показано, що результати співпадають з відомими в публікаціях результатами, отриманими аналітичними методами. Крім того, такий тест дозволив визначити число вузлів ортогоналізації і для випадку неоднорідного заповнювача. Як показали чисельні експерименти, для отримання заданої точності достатньо обирати у всіх розглянутих випадках на відрізок  $[\varepsilon, 1]$  не більше 20 вузлів.

На рис. 1 наведені дисперсійні криві першої моди руху, коли  $\rho_s^* = 1$ , а  $E_s$  змінюється згідно з (19) або (20).

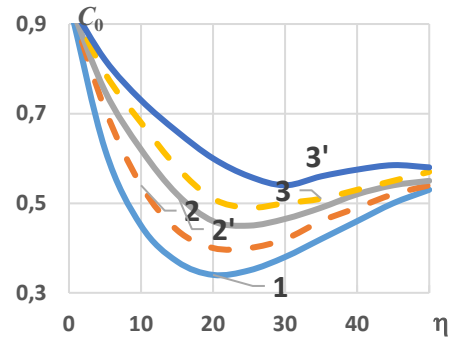


Рисунок 1. Дисперсійні криві системи оболонка-заповнювач

При цьому крива 1 відповідає випадку однорідного заповнювача, для суцільної кривої 2  $\theta = 0,5$ ,  $n = 2$ , для суцільної кривої 3  $\theta = 0,1$ ,  $n = 2$ , для пунктирної кривої 2  $k_1 = 0,5$ , для пунктирної кривої 3  $k_1 = 1$ . З даного рисунка видно, що перемінність модуля Юнга для матеріалу заповнювача суттєво впливає на фазові швидкості. Окрім того, зі зростанням  $E_s$  відбувається зсув мінімумів дисперсійних кривих у бік більш коротких хвиль. Аналогічний аналіз впливу змінності  $\rho_s$  показав, що зі зростанням  $\rho_s$  згідно з законами (19) або (20) фазові швидкості зменшуються.

З практичної точки зору важливим є визначення мінімумів дисперсійних кривих, оскільки це дозволяє знаходити критичні швидкості для задач про дію рухомого нормального навантаження вздовж нескінченно довгої циліндричної оболонки з неоднорідним заповнювачем. На рис. 2 наведені зведені графіки, які ілюструють вплив різних параметрів в законах (19) і (20) на першу критичну швидкість. Розрахунки проведені для  $\varepsilon_1 = 0,2$ ,  $f_2(r_*) = (1 + 0,5r_*)^2$  або  $f_2(r_*) = e^{0,5r_*}$  для різних значень  $n$  і  $k_1$  в законах (19), (20).

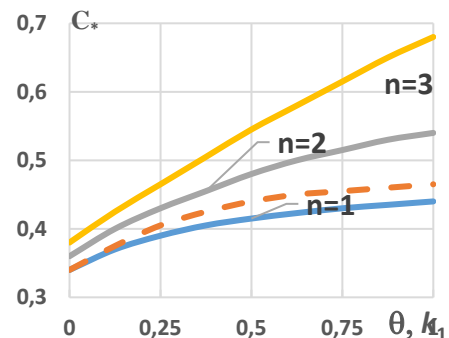


Рисунок 2. Критичні швидкості руху навантаження

В якості другого прикладу застосування розробленого пакету прикладних програм, які базуються на методі ортогональної диференціальної прогонки, розглянемо задачу про власні коливання системи із двох співвісних циліндричних оболонок скінченної довжини з різними радіусами, які з'єднані між собою пружним заповнювачем, що в загальному випадку має змінні по товщині модуль Юнга і густину (трюхшарова циліндрична оболонка з відносно м'яким заповнювачем, рух якого описується динамічними рівняннями теорії пружності).

Рух кожної з оболонок у вісесиметричному випадку будемо описувати рівняннями, які ґрунтуються на гіпотезах Кірхгофа-Лява.

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R_k} \frac{\partial w_k}{\partial x} = \frac{\rho(1-\nu)}{2G} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}$$

$$\frac{\nu}{R_k} \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} + \frac{w_k}{R_k^2} = -\frac{\rho(1-\nu)}{2G} \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \frac{1-\nu}{2Gh} q_{rk} \cdot (21)$$

При цьому індекс 1 відноситься до зовнішньої оболонки, а 2 – до внутрішньої; товщини оболонок вважаємо однаковими і рівними  $h$ ,  $q_{rk}$  – нормальні реакції з боку заповнювача на коливання відповідної оболонки.

Для заповнювача у загальному випадку його неоднорідності записуються рівняння (11). На його бокових поверхнях, вважаючи, що контакт з оболонками відбувається по їх середнім поверхням, повинні виконуватися такі умови: при  $r = R_k$

$$\sigma_{rx} = 0, \quad u_r = W_r, \quad \sigma_{rr} = \begin{cases} -q_{r1}, & \text{при } r = R_1 \\ q_{r2}, & \text{при } r = R_2 \end{cases} \cdot (22)$$

Якщо кожна з оболонок має довжину  $L$ , тоді приймаючи умови шарнірного обпирання на кінцях і обираючи початок координат на одному з торців, записуємо такі умови: при  $x = 0, L$

$$W_k = 0, \quad \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x} = 0 \cdot (23)$$

Припускаємо, що заповнювач своїми торцями опирається на діафрагми, які жорсткі у своїй площині і гнучкі зі своєї площини, тоді приходимо до таких умов:

$$\text{при } x = 0, L \quad u_r = 0, \quad \sigma_{xx} = 0 \quad (24)$$

Враховуючи умови (23) і (24), шукаємо розв'язання рівнянь руху заповнювача і зовнішніх шарів в такому вигляді

$$\begin{Bmatrix} u_k, u_x \\ w_k, u_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{k,0}, U(r) \\ w_{k,0}, W(r) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \frac{m\pi x}{L} \\ \sin \frac{m\pi x}{L} \end{Bmatrix} \sin \omega t, \quad (25)$$

де  $\omega$  – частота власних коливань,  $m$  – число напівхвиль у вісєвому напрямку.

Якщо підставити подання (25) в рівняння (21), то отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, з якої знахо-

димо амплітуди нормальних навантажень, що передаються на заповнювач з боку кожної з двох обшивок, виражені через амплітуди нормальних переміщень середньої поверхні кожної з оболонок

$$q_{r1} = \frac{Ehb_3}{(1-\nu^2)b_1} \frac{w_{1,0}}{R_1^2}, \quad (26)$$

$$b_1 = \frac{\aleph^2 p_*^2}{12} - \delta^2, \quad b_2 = \frac{\aleph^2}{12} (\delta^4 - p_*^2) + 1, \quad b_3 = \nu^2 \delta^2 + b_1 b_2$$

$$q_{r2} = \frac{Ehd_3}{(1-\nu^2)b_1} \frac{w_{2,0}}{R_2^2}, \quad (27)$$

$$d_2 = b_2 - 1 + \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad d_3 = \frac{\nu^2 \delta^2}{\varepsilon^2} + b_1 d_2$$

$$\delta = \frac{m\pi R_1}{L}, \quad \aleph = \frac{h}{R_1}, \quad \varepsilon = \frac{R_2}{R_1}, \quad p_*^2 = \frac{12(1-\nu^2)\rho R_1^4}{Eh^2} p^2.$$

Підставляючи ці залежності в перетворені з урахуванням формул (25) умови (22), приводимо ці умови в амплітудах переміщень точок заповнювача до вигляду аналогічного (16) і (17), при цьому для неоднорідного заповнювача з урахуванням формул (10) будемо мати систему звичайних диференціальних рівнянь аналогічну (18) з відповідними замінами характеристик вільних коливань на параметри задачі про власні коливання. Тепер задача про знаходження частот вільних коливань зводиться до задачі на власні значення системи (1), в якій елементи матриць  $A$ ,  $B$  і  $C$  мають такий вигляд

$$a_{11} = a_{12} = a_{14} = 0, \quad a_{13} = 1$$

$$a_{21} = a_{22} = a_{23} = 0, \quad a_{24} = 1$$

$$a_{31} = -\varphi_2(r_*), \quad a_{32} = \frac{\nu_s \delta}{1-\nu_s} f_3(r_*), \quad a_{33} = -\varphi_1(r_*),$$

$$a_{34} = \frac{\delta}{2(1-\nu_s)}, \quad a_{41} = -\delta \varphi_4(r_*), \quad a_{42} = -\varphi_3(r_*)$$

$$a_{43} = -\frac{\delta}{1-2\nu_s}, \quad a_{44} = -\varphi_1(r_*)$$

$$b_{11} = \frac{\nu_s b_1}{1-\nu_s} + \frac{b_3}{(1-\nu^2)E_s^* \nu_s^* f_1(1)}, \quad b_{12} = -\frac{\nu_s \delta b_1}{1-\nu_s},$$

$$b_{13} = b_1, \quad b_{14} = 0$$

$$b_{21} = \delta, \quad b_{22} = b_{23} = 0, \quad b_{24} = 1$$

$$c_{11} = \frac{\nu_s b_1}{(1-\nu_s)\varepsilon} - \frac{d_3}{(1-\nu^2)E_s^* \nu_s^* f_1(1)}, \quad c_{12} = -\frac{\nu_s \delta b_1}{1-\nu_s},$$

$$c_{13} = b_1, \quad c_{14} = 0$$

$$c_{21} = \delta, \quad c_{22} = c_{23} = 0, \quad c_{24} = 1$$

Тепер задача (1) з нульовими правими частинами в граничних умовах розв'язується методом ортогональної диференціальної прогонки. Щоб оцінити точність даного чисельного методу, а також обрати вузли ортогоналізації оптимальним способом розглянуто граничний випадок задачі, коли заповнювач вважається однорідним. Тоді у формулах (10) треба покласти  $f_1(r) \equiv 1, f_2(r) \equiv 1$  і, враховуючи подання (25), рівняння руху заповнювача можна розв'язати аналітично і отримати для амплітуд переміщень такі вирази

$$\begin{aligned}
 U(r_*) &= \frac{\delta}{R_1} I_0(m_1 r_*) A_1 - \frac{m_2^2}{R_1^2} I_0(m_2 r_*) A_2 + \\
 &+ \frac{\delta}{R_1} Y_0(m_1 r_*) A_3 - \frac{m_2^2}{R_1^2} Y_0(m_2 r_*) A_4 \\
 W(r_*) &= -\frac{m_1}{R_1} I_1(m_1 r_*) A_1 - \frac{\delta m_2}{R_1^2} I_1(m_2 r_*) A_2 - \\
 &- \frac{m_1}{R_1} Y_1(m_1 r_*) A_3 - \frac{\delta m_2}{R_1^2} Y_1(m_2 r_*) A_4 \\
 m_1^2 &= \alpha^2 - \delta^2, \quad m_2^2 = \beta^2 - \delta^2, \quad r_* = r/R_1, \\
 E_s^* &= \frac{E_0 R_1}{Eh}, \quad \rho_s^* = \frac{\rho_0 R_1}{\rho h} \\
 \alpha^2 &= \frac{\aleph^2 \rho_s^* p_*^2}{12(1-\nu^2) E_s^* \nu_s^*}, \quad \beta^2 = \alpha^2 - \frac{\nu_s^*}{\nu_s^{**}} \\
 \nu_s^* &= \frac{1-\nu_s}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)}, \quad \nu_s^{**} = \frac{1}{2(1+\nu_s)}, \quad (28)
 \end{aligned}$$

де  $I_0, I_1, Y_0, Y_1$  – функції Бесселя першого та другого роду.

Підставляючи вирази (28) в перетворені граничні умови в переміщеннях точок заповнювача, отримаємо для визначення  $A_1 \div A_4$  систему однорідних алгебраїчних рівнянь, із умови нетривіальності розв’язків якої приходимо до характеристичного рівняння для визначення власних частот системи із двох оболонок, зв’язаних між собою однорідним пружним заповнювачем, у такому вигляді

$$\det \|e_{ij}\| = 0 \quad (i, j = 1 \div 4). \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= e_{13} = 2\delta m_1, \quad e_{12} = e_{14} = t_3, \quad e_{21} = m_1(2-t_1) + t_3 S_3 \\
 e_{22} &= \delta(2-t_1 - 2m_2 S_6), \quad e_{23} = m_1(2-t_1) + t_3 S_9 \\
 e_{24} &= \delta(2-t_1 - 2m_2 S_{12}), \quad e_{31} = 2\delta m_1 S_1, \quad e_{32} = t_3 S_4 \\
 e_{33} &= 2\delta m_1 S_7, \quad e_{34} = t_3 S_{10}, \quad e_{41} = m_1 \left( \frac{2}{\varepsilon} + t_2 \right) S_1 + t_3 S_2 \\
 e_{42} &= \delta \left[ \left( \frac{2}{\varepsilon} + t_2 \right) S_4 - 2m_2 S_5 \right], \quad a_{43} = m_1 \left( \frac{2}{\varepsilon} + t_2 \right) S_7 + t_3 S_8 \\
 e_{44} &= \delta \left[ \left( \frac{2}{\varepsilon} + t_2 \right) S_{10} - 2m_2 S_{11} \right] \\
 t_1 &= \frac{2(1+\nu_s) b_3}{(1-\nu^2) E_s b_1}, \quad t_2 = t_1 \frac{d_2}{d_3}, \quad t_3 = \delta^2 - m_2^2 \\
 S_1 &= \frac{I_1(m_1 \varepsilon)}{I_1(m_1)}, \quad S_2 = \frac{I_0(m_1 \varepsilon)}{I_1(m_1)}, \quad S_3 = \frac{I_0(m_1)}{I_1(m_1)},
 \end{aligned}$$

$S_4 - S_6$  отримуються із  $S_1 - S_3$  заміною  $m_1$  на  $m_2$ , а  $S_7 - S_{12}$  знаходимо, якщо замінити в  $S_1 - S_6$  функції  $I_n(x)$  функціями  $Y_n(x)$ .

Розрахунки були проведені при таких значеннях безрозмірних параметрів  $\aleph = 0,004, \gamma = \gamma_s = 0,3, \delta = 3, E_s^* = 0,8, \rho_s^* = 1$ . Величина  $\varepsilon$  варіювалася. В якості законів зміни механічних параметрів заповнювача за товщиною були обрані закони, які даються формулами (19) і (20). Спочатку аналітичним методом і методом ортогональної диференціальної прогонки визначалися

власні частоти у випадку однорідного заповнювача і порівняння результатів між собою показало, що практично повне співпадіння ми отримуємо, якщо на усій ділянці  $[\varepsilon, 1]$  будемо брати 15 вузлів ортогоналізації для усіх розглянутих товщин заповнювача (усіх значень  $\varepsilon$ ).

На рис. 3 показана залежність найнижчої частоти власних коливань системи дві оболонки – однорідний заповнювач від радіуса внутрішньої оболонки, яка отримана за двома методами (за формулою (29) і за схемою ортогональної диференціальної прогонки).

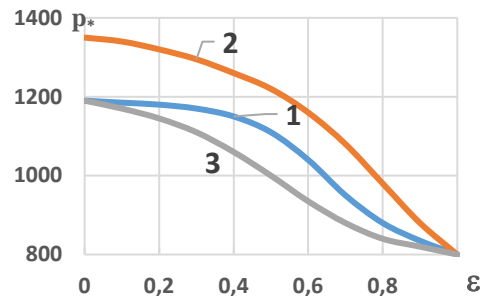


Рисунок 3. Частоти власних коливань у випадку однорідного заповнювача

При цьому крива 1 побудована для вагатого заповнювача ( $\rho_s^* = 1$ ), крива 2 – для невагатого заповнювача ( $\rho_s^* = 0$ ), а крива 3 відповідає випадку відсутності внутрішньої оболонки. Зазначимо, що неврахування інерційності заповнювача може привести до завищення частоти і похибка може досягати 11%.

Рис. 4 ілюструє вплив змінності  $E_s$  на першу частоту власних коливань (при  $f_2 = 1$ ), причому криві 1 – 3 відповідають закону (19), а 2 і 3 відповідають закону (20). Для кривої 1 при  $f_1 = 1$  (однорідний заповнювач), для кривих 2 і 3  $\theta = 0,5, n = 2, k_1 = 0,5$ , для 3 і 3'  $\theta = 1, n = 2, k_1 = 1$ . Бачимо, що змінність  $E_s$  суттєво впливає на власну частоту такої системи, особливо для порівняно товстого ( $\varepsilon < 0,8$ ) заповнювача, причому зі зростанням  $E_s$  за товщиною згідно з законами (19) або (20) частоти збільшуються.

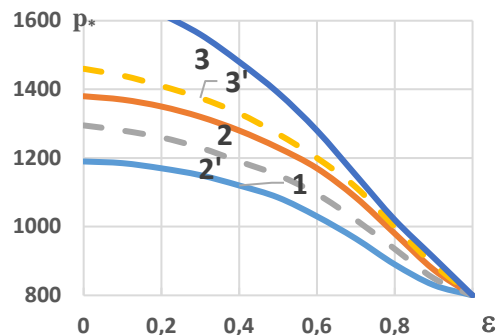


Рисунок 4. Вплив змінності параметрів на власну частоту

Покажемо, як можна застосувати пакет програм для розв’язання стаціонарних динамічних задач про рух зі сталою швидкістю нормального навантаження

вздовж пластин або циліндричних оболонок необмеженої довжини, які контактують з пружною основою зі змінними за товщиною механічними характеристиками. Розглянемо необмежену пластину, яка лежить на пружному шарі (основі) скінченної товщини (рис. 5).

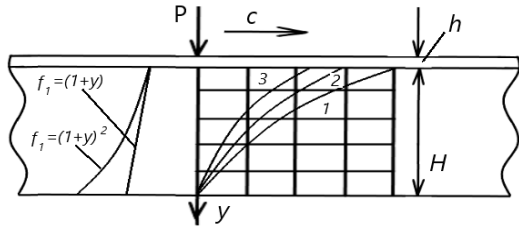


Рисунок 5. Переміщення точок основи

Рух пластини будемо описувати рівняннями теорії типу Тимошенка, коли враховується інерція обертання і поперечний зсув

$$\frac{4Gh}{1-\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \tau_c(x,t) = 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$2k^2 Gh \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) - q_c(x,t) = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p(x,t)$$

$$-\frac{4}{3} \frac{Gh^3}{1-\nu} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - 2k^2 Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right) + h\tau_c(x,t) = -\frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}, \quad (30)$$

де  $k^2$  – коефіцієнт Тимошенка,  $q_c(x,t)$ ,  $\tau_c(x,t)$  – нормальне і дотичне напруження, яке виникає на поверхні розділу пластини і пружної основи.

Рівняння руху неоднорідного плоского шару у переміщеннях отримуємо виходячи з лінійних динамічних рівнянь теорії пружності в прямокутних координатах

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0. \quad (31)$$

Використовуючи закон Гука і співвідношення Коші

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{yy} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{xy} = \mu \varepsilon_{xy}, \quad e = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

і вважаючи, що пружні параметри основи змінюються за товщиною згідно з законами

$$G(y) = G_0 f_1(y), \quad \rho(y) = \rho_0 f_2(y). \quad (33)$$

причому  $G_0 = G_1(0)$ ,  $\rho_0 = \rho(0)$ , а відносно функції  $f_1(y)$  накладається умова, що вона диференційована і не перетворюється в нуль при  $y \in [0, H]$ , тоді із (31) приходимо до таких рівнянь руху неоднорідної основи в переміщеннях

$$\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \nabla^2 u_x + \frac{1}{G(y)} \frac{dG(y)}{dy} \varepsilon_{xy} = \frac{\rho(y)}{G(y)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (34)$$

$$\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \nabla^2 u_y + \frac{1}{G(y)} \frac{dG(y)}{dy} [(\alpha-1)e + 2\varepsilon_{yy}] = \frac{\rho(y)}{G(y)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$\alpha = (1-2\nu)^{-1}$$

Нижньою поверхнею пружний шар опирається на жорстку основу і тут розглянуті два види граничних умов, а саме, коли обидва середовища склеєні, тоді при  $y = H$   $u_x = 0$ ,  $u_y = 0$

або шар може вільно ковзати по жорсткій основі без порушення умов контакту між ними

при  $y = H$   $u_y = 0$ ,  $\sigma_{xy} = 0$

Між пластиною і пружним шаром можливий жорсткий контакт або контакт без тертя і в останньому випадку на верхній границі пружної основи виконуються такі умови

$$\text{при } y=0 \quad u_y = w, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{zz} = -q_c. \quad (37)$$

Поряд з рівняннями типу Тимошенка для пластини можна використовувати рівняння, яке базується на гіпотезах Кіргофа-Лява

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q_c(x,t) = p(x,t),$$

$$D = \frac{Gh^3}{6(1-\nu)}. \quad (38)$$

Оскільки вздовж пластини зі сталюю швидкістю рухається нормальне навантаження, то разом з ним переміщується незмінна картина деформацій і напружень. Тому подальший розгляд будемо проводити в рухомій системі координат, яка вводиться згідно з перетворенням Галілея

$$x = (x' - ct)/H. \quad (39)$$

В рухомій системі координат рівняння (34) приймають такий вигляд

$$\left(1 - M^2 \varphi(y)\right) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta + 2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\beta + 1}{\beta + 2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{q(y)}{\beta + 2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0$$

$$\left(1 - M_s^2 \varphi(y)\right) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + (\beta + 2) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + (\beta + 1) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \beta q(y) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\beta + 2) q(y) \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$q(y) = \frac{d}{dy} \ln f_1(y), \quad \varphi(y) = \frac{f_2(y)}{f_1(y)}, \quad \beta = \frac{2\nu}{1-2\nu}$$

$$M = \frac{c}{c_p}, \quad M_s = \frac{c}{c_s}, \quad c_p = \sqrt{\frac{2G_0(1-\nu)}{\rho_0(1-2\nu)}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{G_0}{\rho_0}}. \quad (40)$$



Задача розв'язується методом фундаментальних розв'язків разом з методом ортогональної диференціальної прогонки при аналізі краєвих задач для окремих гармонік. Розглянемо спочатку випадок, коли по пластині рухається одиничне нормальне навантаження, яке змінюється вздовж  $x$  за законом косинуса, так що

$$p_1(x) = \cos(\xi x). \quad (41)$$

Обмежимося розглядом швидкостей руху навантаження меншими ніж  $c_s$ . Крім того, розглядаємо тільки такі закони зміни параметрів за товщиною шару, коли виконується умова  $(1 - M_s^2 \varphi(y)) > 0, \forall y \in [0, H]$ .

В такому випадку система (40) є системою еліптичного типу. Будемо шукати розв'язки рівнянь (38) і (40) в такому вигляді

$$\begin{cases} w, u_y \\ u_x \end{cases} = \begin{cases} w_0, W(y) \\ U(y) \end{cases} \begin{cases} \cos(\xi x) \\ \sin(\xi x) \end{cases}. \quad (42)$$

Тоді ми приходимо до необхідності інтегрувати таку систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U}{dy^2} + q(y) \frac{dU}{dy} - (1 - M_s^2 \varphi(y)) (\beta + 2) \xi^2 U - \\ & - q(y) W - (\beta + 1) \xi \frac{dW}{dy} = 0 \\ & \frac{d^2 W}{dy^2} + q(y) \frac{dW}{dy} - (1 - M_s^2 \varphi(y)) \frac{\xi^2}{\beta + 2} W + \\ & + \frac{\beta}{\beta + 2} \xi q(y) U - \frac{\beta + 1}{\beta + 2} \xi \frac{dU}{dy} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

при цьому перетворені граничні умови запишуться так

$$\text{при } y = 0 \quad \frac{dU}{dy} - \xi W = 0. \quad (44)$$

$$\frac{\nu}{6(1-\nu)} \frac{\xi^2}{h_d^2} \left( \frac{\xi^2}{h_d^2 + C_n^2} \right) W - \beta \xi U - (\beta + 2) \frac{dW}{dy} = G_0^{-1}$$

$$\text{при } y = H \quad U = 0, \quad W = 0 \quad (45)$$

$$\text{або } W = 0, \quad \frac{dU}{dy} - \xi W = 0.$$

Таким чином, визначення елементарних переміщень звелось до розв'язання крайової задачі для системи двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами, або після очевидних перетворень до розв'язання неоднорідної краєвої задачі (1), елементи матриць якої мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 1, \quad a_{14} = 0, \\ a_{21} &= 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{24} = 1 \\ a_{31} &= (\beta + 2)(1 - M_s^2 \varphi(y)) \xi^2, \quad a_{32} = q(y) \xi, \quad a_{33} = -q(y), \\ a_{34} &= (\beta + 1) \xi, \quad a_{41} = -\frac{\beta}{\beta + 2} q(y) \xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{42} &= \frac{1}{\beta + 2} (1 - M_s^2 \varphi(y)) \xi^2, \quad a_{43} = -\frac{\beta}{\beta + 1} \xi, \\ a_{44} &= -q(y), \quad b_{11} = -\beta \xi, \\ b_{12} &= \frac{\mathcal{M}_d^2 (h_d^2 \xi^2 - C_n^2)}{6(1-\nu)}, \quad b_{13} = 0, \quad b_{14} = -(\beta + 2) \\ b_{21} &= 0, \quad b_{22} = -\xi, \quad b_{23} = 1, \quad b_{24} = 0 \\ c_{11} &= 1, \quad c_{12} = 0, \quad c_{13} = 0, \quad c_{14} = 0 \\ c_{21} &= 0, \quad c_{22} = 1, \quad c_{23} = 0, \quad c_{24} = 0. \end{aligned}$$

або другий варіант умов на нижній грані

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0, \quad c_{12} = -\xi, \quad c_{13} = 1, \quad c_{14} = 0 \\ c_{21} &= 0, \quad c_{22} = 1, \quad c_{23} = 0, \quad c_{24} = 0 \\ d_1 &= \begin{vmatrix} G_0^{-1} \\ 0 \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Зазначимо, що краєва задача (1) з такими матрицями для кожного значення хвильового числа  $\xi$  розв'язується методом ортогональної диференціальної прогонки, але на відміну від двох попередніх задач на власні значення з нульовими матрицями  $d_1$  і  $d_2$  тут окрім прямого треба виконувати і зворотній хід. Маючи результати для окремих гармонік (різних значень  $\xi$ ), переміщення і напруження, які викликаються конкретними заданими навантаженнями, отримуємо, враховуючи лінійність задачі, суперпозицією елементарних розв'язків, використовуючи подання конкретного навантаження інтегралом Фур'є.

Як приклад, розглянемо рух вздовж нескінченної пластини, яка лежить на неоднорідному за товщиною пружному шарі, лінійного зосередженого навантаження, закон зміни якого за координатою  $x$  описується за допомогою дельта-функції Дірака

$$p = p_0 \delta(x - ct).$$

При цьому для отримання результатів використувалося подання дельта-функції інтегралом Фур'є

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(\xi x) d\xi.$$

Лінійною суперпозицією отримуємо переміщення і напруження, які викликані зосередженою силою шляхом інтегрування розв'язків для косинусоїдального навантаження за хвильовим числом в границях від 0 до  $\infty$ . У випадку однорідного нижнього шару проведено порівняння з аналітичними результатами, яке показало практичне співпадіння, крім того, це дозволило оптимально обирати число вузлів ортогоналізації для числового дослідження.

Розглянуті два види неоднорідності матеріалу пружної основи

$$\begin{aligned} G(y) &= G_0 (1 + \varepsilon y)^n, \quad \rho(y) = \rho_0 (1 + \varepsilon y)^m \\ G(y) &= G_0 e^{k_1 y}, \quad \rho(y) = \rho_0 e^{k_2 y}. \end{aligned}$$

Параметри  $\varepsilon$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  варіювалися.

На правій частині рисунка 5 показано розподіл нормальних переміщень точок шару за товщиною при  $G = G_0(1 + \varepsilon y)^2$ ,  $\rho = \rho_0(1 + \varepsilon y)$ , при цьому для кривої 1  $\varepsilon = 0$ , для 2 –  $\varepsilon = 0,5$ , для 3 –  $\varepsilon = 1,0$ . Як показали проведені розрахунки у випадку  $M_s = 0,3$  змінність густини матеріалу значно менше впливає на переміщення і напруження ніж змінність  $G$ . Крім того, заміна граничної умови на нижній поверхні шару слабо впливає на картину напружено-деформованого стану.

Рисунок 6 ілюструє зміну прогинів пластини за довжиною в рухомій системі координат. Зміст індексів 2–3 той самий, що і на рисунку 5.

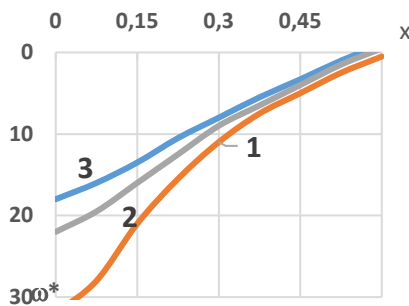


Рисунок 6. Прогини пластини за довжиною

Як видно з рисунка 6, при зміні  $\varepsilon$  від 0 до 1 прогини під силою зменшуються приблизно на 40 %. Аналогічні розрахунки для законів  $G(y) = G_0 e^{k_1 y}$ ,  $\rho(y) = \rho_0 e^{k_2 y}$  показують, що зміна  $k_1$  від 0 до 1 зменшує прогини приблизно на 30 %.

На завершення зазначимо, що розроблений пакет прикладних програм доцільно використовувати в задачах розглянутого тут класу не лише у випадку неоднорідних структур, де механічні параметри змінюються неперервно за законами, які описуються елементарними функціями, але і у тих випадках, де вказані зміни відбуваються дискретно, наприклад, коли маємо справу з основою, яка складається з кількох шарів, характеристики кожного з яких всередині шару незмінні, але свої для кожного з них. Алгоритм буде дуже ефективним і в такому випадку, але при цьому треба обов'язково слідкувати за тим, щоб вузли ортогоналізації потрапляли і на границі між шарами.

### Висновки

1. Розроблено пакет прикладних програм для розв'язання крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з довільними змінними коефіцієнтами, який ґрунтується на методі ортогональної диференціальної прогонки.

2. В якості об'єктів застосування розробленого пакету обрані так звані стаціонарні задачі динаміки для пластин і циліндричних оболонок, які взаємодіють з пружними основами зі змінними за товщиною механічними характеристиками.

3. Розглянути три класи таких задач, а саме: розповсюдження вільних хвиль в системі оболонка – заповнювач, визначення власних частот у трьохшаровій

циліндричній оболонці і рух зі сталюю швидкістю нормального навантаження вздовж необмеженої пластини, що лежить на пружному інерційному неоднорідному шарі.

4. У всіх випадках для тестування програми розглянути граничні випадки середовищ з незмінними параметрами, коли результати чисельного підходу порівнюються з можливими для таких випадків аналітичними розв'язками.

5. Результати, отримані за даним підходом, наведені у вигляді графіків, які показують вплив неоднорідності середовища на швидкості розповсюдження хвиль, на власні частоти, на переміщення і напруження.

6. Крім випадків неперервної зміни модуля Юнга і густини за товщиною запропонований пакет програм можна використовувати і для шаруватих основ, коли в межах кожного шару характеристики залишаються незмінними, але стрибком приймають інші значення на сусідньому шарі.

### Список літератури

1. Пожуєв, А. В. Нестационарні процеси в пластинах і оболонках, які взаємодіють з тривимірним пружним середовищем [Текст] / А. В. Пожев, В. І. Пожуєв. – Запоріжжя : Кругозір, 2015. – 228 с.

2. Пожуєв А. В. Вільні хвилі та стаціонарне деформування елементів конструкцій, які взаємодіють з інерційним середовищем [Текст] / А. В. Пожев, В. І. Пожуєв. – Запоріжжя : Кругозір, 2016. – 248 с.

3. Пожуєв А. В. Математичні моделі та методи розрахунку нестационарної динаміки циліндричних оболонок у тривимірному пружному середовищі / А. В. Пожуєв, В. І. Пожуєв, А.В. Фасоляк. – Запоріжжя : Статус, 2019. – 152 с.

4. Горшков, А. Г. Стационарные задачи динамики многослойных конструкций [Текст] / А. Г. Горшков, В. И. Пожуєв. – М. : Машиностроение, 1992. – 224 с.

5. Горшков А. Г. Пластини и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок [Текст] / А. Г. Горшков, В. И. Пожуєв. – М. : Изд – во МАИ, 1992 – 136 с.

6. Пожуєв А. Дія жорсткого тіла на внутрішню поверхню товстостінного біметалічного циліндра. [Текст] / А. Пожуєв, В. Пожуєв, О. Михайлуца // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2024. – 2. – С. 62–71.

7. Манжос, О. Нестационарна реакція циліндричної оболонки з пружним шаром на дію рухомого радіального навантаження. [Текст] / О. Манжос, А. Пожуєв, О. Михайлуца // Технічні науки та технології. – 2023. – 2 (32). – С. 107–116.

8. Foroutan K. Nonlinear dynamic response and vibration of spiral stiffened FG toroidal shell segments with variable thickness [Text] / K. Foroutan, L. Dai // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2023. – 30. – P. 3184–3203.

9. Safarov I. I. Propagation of own non-axisymmetric waves in viscoelastic three-layered cylindrical shells

[Text] / I. I. Safarov, M. K. Teshae, A. M. Marasulov, B. Z. Nuriddinov // Engineering journal. – 2021. – 25(7). – P. 97–107.

10. Vibrations of cylindrical shell structures filled with layered viscoelastic material [Text] / I. Safarov, M. Teshae, A. Marasulov et al. // E3S Web of Conferences. – 2021. – 264. – P. 451–461.

11. Dynamic behavior of cylindrical shell with partial constrained viscoelastic layer damping under an impact load [Text] / B. Khalfi, M. Nasraoui, J. Chakhari et al. // Acta Mechanica. – 2023. – 5. – P. 2125–2143.

12. Deformation of cylindrical shell by external pressure [Text] / N. Fidrovska, E. Slepuzhnikov, I. Perevoznik, S. Khursenko // Sciences of Europe. – 2021. – 2(64). – P. 68–71.

13. Petrosian, L. G. Static and Dynamic Analysis of Engineering Structures: Incorporating the Boundary Element Method [Text] / L. G. Petrosian, V. A. Ambartsumian. John Wiley & Sons Ltd, 2020. – 501 p.

14. Bhattacharyya, A. Analysis of the dynamics of thin isotropic cylindrical shell in asymptotic approach [Text] / A. Bhattacharyya, B. Mukhopadhyay // Applied Mathematical Modelling. – 2016. – 40 (9–10). – P. 5324–5334.

15. Investigation on free vibration and transient response of functionally graded graphene platelets reinforced cylindrical shell resting on elastic foundation. [Text] / Z. Chen, A. Wang et al. // Eur. Phys. J. Plus. – 2020. – 135(7). – P. 1–34.

Одержано 05.03.2025

## APPLICATION OF THE ORTHOGONAL DIFFERENTIAL SCAN METHOD IN THE ANALYSIS OF STATIONARY DYNAMIC PROBLEMS IN HETEROGENEOUS STRUCTURES

Andriy Pozhuyev

Ph. D., Professor, Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, Ukraine, *e-mail:* [scorpio6828@gmail.com](mailto:scorpio6828@gmail.com), ORCID: 0000-0002-4083-5139

Volodymyr Pozhuev

Dr. Sc., Professor, Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, National University “aporizhzhia Polytechnic, Zaporizhzhia, Ukraine, *e-mail:* [pozhuevvi@gmail.com](mailto:pozhuevvi@gmail.com), ORCID: 0000-0002-9163-7888

Olena Mikhailutsa

Ph. D., Associate Professor of the Department of Electronics, Information systems and Software, Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, Ukraine, *e-mail:* [elenamikhaylutsa7@gmail.com](mailto:elenamikhaylutsa7@gmail.com), ORCID: 0000-0003-2935-7997

**Purpose.** It is development of a numerical algorithm for solving a wide range of stationary dynamics problems on the interaction of plates and cylindrical shells with elastic inertial foundations, the mechanical parameters of which vary in thickness according to arbitrary continuous or discrete laws. Solution of specific problems by the obtained algorithm and assessment of the influence of the variability of the medium characteristics on the main dynamic characteristics using three stationary dynamics problems as an example.

**Research methods.** Timoshenko-type equations and equations based on the Kirchhoff-Love hypothesis are used to describe the motion of plates and shells. The behavior of the foundation is described by dynamic equations of elasticity theory in stresses, from which, taking into account the changeability of Young's modulus and density, equations in displacements with variable coefficients are derived, which in the general case cannot be integrated analytically. For the boundary value problem for a system of ordinary differential equations obtained as a result of the transition to amplitudes and recording the contact conditions between a thin-walled structure and a non-uniform foundation, the orthogonal differential sweep method is used, which uses the Runge-Kutta method at each orthogonalization step to solve the problem. Thus, in problems of free waves and natural frequencies, the eigenvalue problem is solved, and in problems of moving loads, it is necessary to use the reverse move and then apply the superposition method. To assess the accuracy, as well as the optimal choice of orthogonalization nodes in the limiting cases of all the considered problems with a homogeneous foundation, analytical solutions are found and a comparison of the results is carried out.

**Results.** A software package for numerical solution of homogeneous and heterogeneous boundary value problems for systems of ordinary differential equations with variable coefficients based on the orthogonal differential sweep method has been developed. In this study, this software package is used for problems from three main classes of stationary dynamics problems: propagation of free waves in a cylindrical shell – heterogeneous elastic filler system, determination of natural frequencies in a three-layer cylindrical shell with a heterogeneous middle layer, and motion of a normal load along a plate on a foundation heterogeneous in thickness. Each problem shows the influence of the foundation heterogeneity on phase velocities, natural frequencies, and plate displacement. The efficiency of the developed program for more complex practical problems has been tested using boundary transitions to corresponding homogeneous materials, and recommendations have been made on the use of this algorithm for media with a significant number of layers.

**Scientific novelty.** An algorithm based on the orthogonal differential sweep method has been developed for problems of stationary dynamics of plates and shells interacting with a three-dimensional heterogeneous inertial medium. Three problems from three different classes of this section of solid mechanics have been solved with its help. The ways of further use of the developed package for problems of such classes are indicated.

**Practical value.** The developed software package and the results obtained with its help can be used in the practice of design organizations engaged in the development of elements of new technology, construction, and the construction of modern highways. In addition, the mathematical part of this publication can be useful not only in the mechanics of a deformable solid, but also in those sections of science where boundary value problems arise for systems of ordinary differential equations.

**Key words:** differential equations, orthogonal sweep, free waves, natural frequencies, Galilean transformation, moving coordinate system.

## References

1. Pozhuyev, A. V., Pozhuev, V. I. (2015). Nestatsionarni protsesy v plastynakh i obolonkakh, yaki vzayemodiyut' z tryvymirnym pruzhnym seredo-vyshchem [Unsteady processes in plates and shells interacting with a three-dimensional elastic medium]. *Kruhozir*, 228.
2. Pozhuyev, A. V., Pozhuev, V. I. (2016). Vil'ni khvyli ta statsionarne deformuvannya elementiv konstruktiv, yaki vzayemodiyut' z inertsiynym seredovyschem [Free waves and stationary deformation of structural elements interacting with an inertial environment]. *Kruhozir*, 248.
3. Pozhuyev, A. V., Pozhuev, V. I., Fasolyak A.V. (2019). Matematychni modeli ta metody rozrakhunku nestatsionarnoyi dynamiky tsylindrychnykh obolonok u tryvymirnomu pruzhnomu seredovyschi [Mathematical models and methods for calculating unsteady dynamics of cylindrical shells in a three-dimensional elastic medium]. *Status*, 152.
4. Gorshkov, A. G., Pozhuev, V. I. (1992). Statsionarnyye zadachi dinamiki mnogosloynnykh konstruktiv [Stationary problems of dynamics of multilayer structures]. *Mashinostroyeniye*, 224.
5. Gorshkov, A. G., Pozhuev, V. I. (1992). Plastyny i obolochki na inertsiionnom osnovanii pri deystvii podvizhnykh nagruzok [Plates and shells on an inertial base under the action of moving loads]. MAI Publishing House, 136.
6. Pozhuyev, A., Pozhuyev, V., Mikhaylutsa, O. (2024). Diya zhorstkoho tila na vnutrishnyu poverkhnyu tovtostinnoho bimetalichnoho tsylindra. [The action of a rigid body on the inner surface of a thick-walled bimetallic cylinder] *Novi materialy i tekhnolohiyi v metalurhiyi ta mashynobuduvanni*, (2), 62–71.
7. Manzhos, O., Pozhuyev, A., Mikhaylutsa, O. (2023). Nestatsionarna reaktsiya tsylindrychnoyi obolonky z pruzhnym sharom na diyu rukhomoho radial'noho navantazhennya. [Non-stationary response of a cylindrical shell with an elastic layer to the action of a moving radial load] *Tekhnichni nauky ta tekhnolohiyi*, 2 (32), 107–116.
8. Foroutan, K., Dai, L. (2023). Nonlinear dynamic response and vibration of spiral stiffened FG toroidal shell segments with variable thickness. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 30, 3184–3203.
9. Safarov, I., Teshae, K., Marasulov, A., Nuriddinov, B. (2021). Propagation of own non-axisymmetric waves in viscoelastic three-layered cylindrical shells. *Engineering journal*, 25(7), 97–107.
10. Safarov, I., Teshae, M., Marasulov, A., Jurayev, T., Raxmonov, B. (2021). Vibrations of cylindrical shell structures filled with layered viscoelastic material. *E3S Web of Conferences*, 264, 451–461.
11. Khalfi, B., Nasraoui, M., Chakhari, J., Ross, A., Chafra, M. (2023). Dynamic behavior of cylindrical shell with partial constrained viscoelastic layer damping under an impact load. *Acta Mechanica*, 5, 2125–2143.
12. Fidrovska, N., Slepuzhnikov, E., Perevoznik, I., Khursenko, S. (2021). Deformation of cylindrical shell by external pressure. *Sciences of Europe*, 2(64), 68–71.
13. Petrosian, L. G., Ambartsumian, V. A. (2020). *Static and Dynamic Analysis of Engineering Structures: Incorporating the Boundary Element Method*. John Wiley & Sons Ltd, 501.
14. Bhattacharyya, A., Mukhopadhyay, B. (2016). Analysis of the dynamics of thin isotropic cylindrical shell in asymptotic approach. *Applied Mathematical Modelling*, 40 (9–10), 5324–5334.
15. Chen, Z., Wang, A., Qin, B., Wang, Q., Zhong, R. (2020). Investigation on free vibration and transient response of functionally graded graphene platelets reinforced cylindrical shell resting on elastic foundation. *Eur. Phys. J. Plus*. 135(7), 1–34.