

УДК 62-233.3/9

Попович О. Г.

канд. техн. наук, доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного університету «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна, e-mail: machinesmechanics@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4959-8838

Шевченко В. Г.

канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного університету «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна, e-mail: shevawk@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9037-6367

РАЦІОНАЛЬНІ ЗМІЩЕННЯ ТВІРНОГО КОНТУРУ КОЛІС ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПРЯМОЗУБОЇ ПЕРЕДАЧІ ДЛЯ ЗМЕНШЕННЯ ЗНОШУВАННЯ ЗУБІВ

Мета роботи. Створити методiku визначення таких коефіцієнтів зміщення твірного контуру для ведучого та веденого коліс циліндричної прямозубої передачі, за яких на найбільш підданих до зношування ділянках евольвентних поверхонь зубів буде мінімальною швидкість зношування поверхневого шару з часом роботи цієї передачі.

Методи дослідження базуються на комплексному застосуванні теорії евольвентної зубчастої передачі та закономірностей трибології; для мінімізації функції було застосовано метод золотого перерізу.

Отримані результати. Отримано безрозмірну величину, яка є функцією від коефіцієнтів зміщення твірного контуру для ведучого та веденого коліс циліндричної прямозубої передачі. Значення цієї функції пропорційні найбільшій серед швидкостей зношування в околі характерних точок на евольвентних профілях зубів цих коліс. Створено методiku визначення раціональних коефіцієнтів зміщення твірного контуру, які мінімізують отриману безрозмірну функцію, та за яких буде максимальною тривалість роботи прямозубої передачі до того, коли найбільша товщина зношеного шару на активних поверхнях зубів досягне гранично допустимої величини.

Наукова новизна. Обґрунтовано, що збільшення товщини зношеного шару з часом роботи прямозубої передачі буде відбуватись найшвидше в околі певних характерних точок на евольвентних профілях зубів коліс. Розроблено розрахункову модель для визначення товщини зношеного шару в околі крайніх активних точок профілів зубів пари циліндричних прямозубих коліс та в околі нижніх і верхніх граничних точок однопарного зачеплення. У цій моделі враховано вплив питомих ковзань і чисел зубів коліс та твердостей їхнього поверхневого шару на швидкості зношування у характерних точках на профілях зубів. Крім того, враховано розподіл повної сили взаємодії цих коліс між двома парами зубів при двопарному зачепленні, а також зміну сили, яку передає одна пара зубів, при її вході або виході з однопарного зачеплення.

Практична цінність. Створену методiku визначення коефіцієнтів зміщення твірного контуру доцільно застосовувати при проектуванні циліндричних прямозубих передач для машин і обладнання, що функціонують в умовах, за яких можливе потрапляння абразивних часток у зону зачеплення зубів. Наведено приклад застосування цієї методики у проектувальному розрахунку циліндричної прямозубої передачі.

Ключові слова: евольвентна зубчаста передача, циліндричне прямозубе колесо, зношений шар, коефіцієнт зміщення твірного контуру.

Вступ

Прямозубі евольвентні передачі поступаються за плавністю зачеплення та мають дещо меншу навантажувальну здатність у порівнянні з косозубими передачами (за однакових габаритних розмірів). Проте в прямозубих циліндричних передачах не виникає осьових складових сил у зачепленні, що дає змогу застосовувати не тільки радіально-упорні, а й радіальні підшипники кочення в якості опор валів прямозубої передачі.

При проектуванні зубчастої передачі необхідно розрахувати такі значення її геометричних параметрів, щоб при заданих умовах роботи ця передача відповідала критеріям опору до контактних руйнувань і згинальних руйнувань зубів коліс. Для зубчастих передач, які функціонують в умовах, коли неможливо

повністю захистити зону зачеплення коліс від потрапляння абразивних часток, не менш важливим є критерій стійкості зубів до зношування.

При теоретичному контакті евольвентних поверхонь зубів пари прямозубих коліс (тобто за відсутності передавання зусиль) ці поверхні у будь-який момент зачеплення дотикаються по відрізках прямих, що паралельні до геометричних осей цих коліс. Під час обертання пари прямозубих коліс зазначені відрізки прямолінійно переміщуються у площині зачеплення, яка є спільною дотичною площиною до основних циліндрів цих коліс.

Коли від ведучого прямозубого колеса до веденого передаються зусилля, то (для передачі з достатньо точно виготовленими колесами, жорсткими валами та опорами валів) площадки контакту зубів є прямокутниками з довжиною, яка дорівнює ширині

зубчастого вінця, та шириною, що у багато разів менша як за довжину прямокутників, так і за радіуси кривизни активних профілів зубів.

Відносний рух зуба ведучого колеса та зуба веденого колеса під час їхнього зачеплення являє собою перекочування з проковзуванням (проковзування відсутнє тільки коли евольвентні профілі зубів контактують у полюсі зачеплення).

Процеси накопичення втомних пошкоджень від циклічної дії контактних навантажень і від циклічного згинання відбуваються одночасно та у взаємодії зі зношуванням поверхневого шару зубів. У процесі зношування зменшується товщина поверхневого шару зубів коліс, зміцнених термічною або хіміко-термічною обробкою, що поступово призведе до порушення умови контактної витривалості зубів або витривалості зубів при циклічному згинанні.

Основними геометричними параметрами циліндричної прямозубої передачі, які конструктор має визначити під час її проектування, є: міжосьова відстань (a_w), ширина (b_w) зубчастих вінців, модуль зачеплення (m), числа зубів (z_1 і z_2), а також коефіцієнти зміщення (x_1 та x_2) твірного контуру для ведучого та веденого коліс.

Аналіз досліджень та публікацій

Із трибології відомо [1], що товщину h_λ зношеного шару на стадії усталеного процесу зношування можна записати у вигляді:

$$h_\lambda = I_\lambda \cdot L_{fr\lambda}, \quad (1)$$

де I_λ – інтенсивність лінійного зношування (середня по ширині площадки контакту); $L_{fr\lambda}$ – довжина шляху тертя на цій стадії зношування.

Тут і далі в цій статті символом λ в нижньому індексі біля фізичної величини будемо позначати зубчасте колесо, до якого має відношення ця величина ($\lambda = 1$ – ведуче, $\lambda = 2$ – ведене колесо). Товщина h_λ вимірюється вздовж нормалі до профілю зуба у площині, що перпендикулярна до геометричних осей пари прямозубих коліс (між цим профілем наприкінці стадії припрацювання і в момент часу t від початку стадії усталеного зношування) у системі координат, яка жорстко зв'язана з розглядуваним колесом.

Шлях тертя $L_{fr\lambda}$ для довільної точки на активному профілі зуба за проміжок часу t є добутком шляху тертя ковзання при одноразовому проходженні площадки контакту по цій точці на число разів зачеплення зуба за цей проміжок часу. Тому, згідно монографії [1], можна написати:

$$L_{fr\lambda} = k_q \cdot 2 \cdot s_{cont} \cdot \theta_\lambda \cdot v_\lambda \cdot t, \quad (2)$$

де k_q – число однакових зубчастих коліс, які

перебувають у зачепленні з розглядуваним колесом; s_{cont} – півширина площадки контакту зубів коліс; θ_λ – питома ковзання для розглядуваної точки на евольвентному профілі зуба; v_λ – число обертів зубчастого колеса за одну секунду; t – тривалість роботи передачі (від початку стадії усталеного зношування) в секундах.

Будь-яке колесо ступінчастої однопоточної зубчастої передачі перебуває у зачепленні тільки з одним спряженим колесом, тому для таких коліс у формулу (2) слід підставити $k_q = 1$.

Інтенсивність зношування зубів колеса залежить від ряду факторів: контактних напружень, твердості поверхневого шару матеріалу, шорсткості активних поверхонь зубів, в'язкості мастильного матеріалу та його здатності змочувати контактні поверхні й адсорбуватися на них, а також від кількості, розмірів і фізико-механічних властивостей абразивних часток. При цьому, згідно опису результатів експериментів, який наведено у книзі [2], у багатьох випадках для важконавантажених передач інтенсивність зношування зубів I_λ є прямо пропорційною найбільшому нормальному напруженню σ_H на площадці контакту:

$$I_\lambda = k_{Int} \cdot \sigma_H / H_{B\lambda}, \quad (3)$$

де $H_{B\lambda}$ – твердість поверхневого шару матеріалу, яку виражено у тих самих одиницях вимірювання, що і напруження σ_H ; k_{Int} – коефіцієнт пропорційності, який враховує вплив вищезазначених факторів, за винятком σ_H і $H_{B\lambda}$, на інтенсивність зношування (значення k_{Int} однакове для обох коліс прямозубої передачі, постійне по всій активній поверхні зуба).

З розв'язку задачі про притискання одне до одного двох пружних тіл, коли площадка контакту являє собою довгий прямокутник, відомо, що епюра нормальних напружень на ширині цього прямокутника має вигляд півеліпсу. Найбільшого значення нормальне напруження досягає на прямій, яка розташована посередині між довгими сторонами цього прямокутника, та його можна записати [3] так:

$$\sigma_H = \frac{2 \cdot q_n}{\pi \cdot s_{cont}}, \quad (4)$$

де q_n – нормальне до евольвентної поверхні зуба питома зусилля, що припадає на одиницю довжини площадки контакту.

Розподілені зусилля, які діють у циліндричній евольвентній прямозубій передачі з боку зубів одного колеса на зуби іншого, мають нормальну та дотичну складові. У прямозубої передачі лінії дії розподілених нормальних зусиль лежать у площині зачеплення та утворюють прямий кут з тією твірною основного

циліндра, яка теж лежить у цій площині. Якщо на поверхнях зубів коліс є півка мастильного матеріалу, то момент відносно осі прямозубого колеса, створений системою розподілених дотичних зусиль (тобто сил тертя), є нехтовно малим у порівнянні з моментом T_λ відносно тієї ж осі від системи нормальних зусиль. Тоді середню по довжині площадки контакту інтенсивність q_n розподілених нормальних зусиль, які передаються через одну пару зубів, у довільній точці зачеплення пари прямозубих коліс можна записати таким чином:

$$q_n = k_\alpha \cdot q_{sum} = \frac{k_\alpha \cdot T_2}{b_w \cdot r_{b2}}, \quad (5)$$

де k_α – коефіцієнт, який враховує розподіл навантаження між зубами колеса, які одночасно знаходяться в зачепленні; r_{b2} – радіус основного циліндру веденого прямозубого колеса.

При будь-якому положенні площадки контакту поверхонь зубів під час однопарного зачеплення значення коефіцієнта $k_\alpha = 1$. Під час двопарного зачеплення повна нормальна сила взаємодії ведучого та веденого коліс створюється двома парами зубів, а коефіцієнт k_α показує, яку частину від повної сили передає розглядувана пара зубів.

Підставивши у праву частину (1) вираз (3) для I_λ з урахуванням співвідношення (4) для σ_H , а також вираз (2) для $L_{fr\lambda}$ з урахуванням значення $k_q = 1$, ми отримали формулу для товщини h_λ зношеного шару у довільній точці активного профілю зуба колеса λ в такому вигляді:

$$h_\lambda = \frac{4 \cdot k_{Int} \cdot q_n \cdot \theta_\lambda \cdot v_\lambda \cdot t}{\pi \cdot H_{B\lambda}}. \quad (6)$$

Питомі ковзання θ_1 і θ_2 для довільної пари спряжених точок на профілях зубів ведучого та веденого коліс визначають [4] через абсолютні значення швидкостей V^{sl} і V_λ^{pr} у відповідний момент зачеплення:

$$\theta_\lambda = V^{sl} / V_\lambda^{pr}, \quad (7)$$

де V^{sl} – швидкість ковзання між профілями зубів цих коліс; V_λ^{pr} – швидкість переміщення площадки контакту по поверхні зуба колеса λ .

Абсолютна величина питомого ковзання θ_λ монотонно зростає вздовж евольвентного профілю зуба колеса від нуля в точці на початковому колі до

значень: $\theta_{ded\lambda}$ в нижній активній точці профілю і $\theta_{add\lambda}$ в точці на колі вершин.

З формули (6) з урахуванням (5) випливає, що товщина зношеного шару буде найшвидше збільшуватись з часом на ділянках в околі певних характерних точок евольвентних профілів зубів ведучого та веденого коліс прямозубої передачі. Це можуть бути ділянки в околі або нижніх активних точок профілів зубів, або точок на циліндрах вершин прямозубих коліс (внаслідок великих значень θ_λ у цих точках). Або це можуть бути ділянки в околі нижніх чи верхніх граничних точок однопарного зачеплення (оскільки на ділянці однопарного зачеплення інтенсивність нормальних зусиль $q_n^{one} = q_{sum}$ є більшою, ніж на ділянках, де зачеплення є двопарним).

Для порівняння доречно зазначити, що у циліндричній косозубої передачі, в якій коефіцієнт осьового перекриття близький до натурального числа, сумарна довжина контактних площадок практично не змінюється під час зачеплення (на відміну від прямозубої передачі). Тому, як це було враховано у нашій роботі [5] при складанні розрахункових формул для товщини зношеного шару на активних поверхнях зубів косозубих коліс такої передачі, середню (по довжині площадок контакту) інтенсивність питомих нормальних зусиль слід розглядати як постійну величину.

У наших роботах [5] і [6] були створені методики визначення таких параметрів коригування для циліндричних косозубих і прямозубих передач, за яких мінімізується більша з двох сум швидкостей зношування на спряжених ділянках в околі верхніх і нижніх активних точок профілів зубів ведучого та веденого коліс. Для реверсивної прямозубої передачі зазначена методика дозволяє знизити динамічні навантаження на зубчасті колеса та інші деталі приводу, оскільки вона дає можливість сповільнити зростання бокового проміжку між зубами пари коліс, яке відбувається внаслідок зношування.

У роботах [7] і [8] розроблено методику та виконано розрахунки товщини зношеного шару на активних поверхнях зубів коліс для циліндричних прямозубих і косозубих (коригованих та некоригованих) передач. Автори цієї методики вважали значення швидкості переміщення площадки контакту по евольвентній поверхні зуба постійним та обчислили його для точки на ділячці на циліндрі зубчастого колеса. Насправді ж ця швидкість залежить від кута профілю евольвенти, а тому змінюється під час переміщення площадки контакту по бічній поверхні зуба.

Мета роботи

Мета даної роботи – створити методику визначення коефіцієнтів зміщення (x_1 та x_2) твірного контуру, за яких під час роботи циліндричної прямозубої передачі найбільша серед швидкостей

зношування в околі характерних точок на евольвентних профілях зубів коліс набуває свого мінімального значення.

Матеріал і методика досліджень

Площина зачеплення перетинається з будь-якою площиною, яка перпендикулярна до геометричних осей прямозубих коліс, по прямій зачеплення. Вздовж відрізка прямої зачеплення переміщується точка теоретичного контакту профілів зубів цих коліс від моменту входу розглядуваної пари зубів у зачеплення до моменту її виходу з нього.

З теорії циліндричних зубчастих передач відомі формули [9] для визначення швидкостей $V_{Y\lambda}^{pr}$ та V_Y^{sl} , коли евольвентні профілі зубів ведучого та веденого коліс дотикаються у довільній точці Y на прямій зачеплення, контактуючи один з одним спряженими точками Y_1 та Y_2 . Для прямозубої передачі із зовнішнім зачепленням ці формули мають вигляд:

$$V_{Y\lambda}^{pr} = \omega_\lambda \cdot r_{b\lambda} \cdot \tan \alpha_{Y\lambda}, \quad (8)$$

$$V_Y^{sl} = (\omega_1 + \omega_2) \cdot r_{b\lambda} \cdot \left| \tan \alpha_{Y\lambda} - \tan \alpha_w \right|, \quad (9)$$

де $\alpha_{Y\lambda}$ – кут профілю для точки Y_λ зубчастого колеса; α_w – кут зачеплення; ω_1 і ω_2 – абсолютні значення кутових швидкостей обертання ведучого та веденого прямозубих коліс.

Формула (9) дає однакові значення V_Y^{sl} для $\lambda = 1$ і $\lambda = 2$, тому позначення швидкості ковзання не містить символу λ у нижньому індексі.

Радіуси основних циліндрів (r_{b1} і r_{b2}) для ведучого та веденого коліс прямозубої передачі визначають [10] за формулою:

$$r_{b\lambda} = \frac{m \cdot z_\lambda}{2} \cdot \cos \alpha_n, \quad (10)$$

де m – модуль зачеплення; α_n – кут профілю твірного контуру (тобто кут профілю твірної рейки у перерізі площиною, перпендикулярною до поверхонь її зубів), у загальному машинобудуванні стандартне значення $\alpha_n = 20^\circ = (\pi/9) \text{ рад}$.

Число обертів ν_λ за одну секунду пов'язано, як відомо, з абсолютною величиною кутової швидкості обертання ω_λ цього колеса таким чином: $\nu_\lambda = \omega_\lambda / (2 \cdot \pi)$.

Прийнявши до уваги це співвідношення між ν_λ і ω_λ та підставивши у праву частину (6) вираз (7) для θ_λ з урахуванням формул (8) і (9) для $V_{Y\lambda}^{pr}$ та V_Y^{sl} , ми отримали формулу для розрахункового значення

товщини $h_{Y\lambda}$ зношеного шару у довільній точці Y_λ активного профілю зуба колеса λ у такому вигляді:

$$h_{Y\lambda} = \frac{2 \cdot k_{Int} \cdot q_{nY} \cdot (\omega_1 + \omega_2) \cdot t}{\pi^2 \cdot H_{B\lambda}} \cdot \left| \frac{\tan \alpha_w}{\tan \alpha_{Y\lambda}} - 1 \right|. \quad (11)$$

Підставивши у праву частину (11) вираз (5) для q_n з урахуванням формули (10) для $r_{b\lambda}$, ми записали формулу для розрахункової товщини $h_{Y\lambda}$ зношеного шару наступним чином:

$$h_{Y\lambda} = \frac{4 \cdot k_{Int} \cdot k_{\alpha Y\lambda} \cdot T_2 \cdot (\omega_1 + \omega_2) \cdot t}{\pi^2 \cdot H_{B\lambda} \cdot b_w \cdot m \cdot z_2 \cdot \cos \alpha_n} \cdot \left| \frac{\tan \alpha_w}{\tan \alpha_{Y\lambda}} - 1 \right|. \quad (12)$$

Вводимо допоміжну величину U , яка має розмірність швидкості:

$$U = \frac{4 \cdot k_{Int} \cdot T_2 \cdot (\omega_1 + \omega_2)}{\pi^2 \cdot H_{B2} \cdot b_w \cdot m \cdot z_2 \cdot \cos \alpha_n}, \quad (13)$$

а також безрозмірні величини $f_{Y\lambda}$ в такому узагальненому вигляді:

$$f_{Y\lambda} = \frac{H_{B2}}{H_{B\lambda}} \cdot \left| \frac{\tan \alpha_w}{\tan \alpha_{Y\lambda}} - 1 \right|. \quad (14)$$

Застосувавши величини U і $f_{Y\lambda}$, які ми ввели виразами (13) і (14), запишемо формулу (12) для розрахункової товщини $h_{Y\lambda}$ зношеного шару в компактному вигляді:

$$h_{Y\lambda} = k_{\alpha Y\lambda} \cdot f_{Y\lambda} \cdot U \cdot t. \quad (15)$$

У формулах (14) і (15) в нижніх індексах замість " $Y\lambda$ " можна записати позначки " $low\lambda$ " або " $high\lambda$ " для нижніх або верхніх граничних точок однопарного зачеплення, чи позначки " $ded\lambda$ " або " $add\lambda$ " для нижніх активних точок профілів зубів або точок на циліндрах вершин коліс. Тоді згідно (14) матимемо формули для безрозмірних величин $f_{low\lambda}$ і $f_{high\lambda}$, $f_{ded\lambda}$ і $f_{add\lambda}$, які, по суті, характеризують вплив питомих ковзань, чисел зубів коліс і твердостей їх поверхневого шару на швидкості зношування у зазначених характерних точках.

Кути профілю для характерних точок евольвентних профілів зубів коліс прямозубої передачі із зовнішнім зачепленням можна визначити за допомогою нижченаведених формул (19)-(23).

Кути профілю (α_{add1} і α_{add2}) для точок на вершинах зубів ведучого та веденого прямозубих коліс визначають [10] так:

$$\alpha_{add\lambda} = \arccos(r_{b\lambda}/r_{a\lambda}), \quad (16)$$

де $r_{a\lambda}$ – радіуси циліндрів вершин.

Радіуси циліндрів вершин (r_{a1} і r_{a2}) для цих коліс визначають [10] за формулою:

$$r_{a\lambda} = m \cdot \left(\frac{z_\lambda}{2} + h_a^* + x_\lambda + k_{sh} \right), \quad (17)$$

де x_λ – коефіцієнти зміщення твірного контуру; h_a^* – коефіцієнт висоти голівки твірного контуру, його стандартне значення $h_a^* = 1$; k_{sh} – допоміжний коефіцієнт, який визначають [10] таким чином:

$$k_{sh} = \frac{a_w}{m} - \frac{z_1 + z_2}{2} - (x_1 + x_2). \quad (18)$$

Добуток ($x_\lambda \cdot m$) є величиною зміщення твірного контуру для прямозубого колеса λ .

Підставивши у праву частину (16) вирази для $r_{b\lambda}$ і $r_{a\lambda}$ згідно (10) і (17), запишемо кути профілю $\alpha_{add\lambda}$ наступним чином:

$$\alpha_{add\lambda} = \arccos \left(\frac{z_\lambda \cdot \cos \alpha_n}{z_\lambda + 2 \cdot (h_a^* + x_\lambda + k_{sh})} \right). \quad (19)$$

Тангенси кутів профілю (α_{ded1} і α_{ded2}) для нижніх активних точок зубів ведучого та веденого прямозубих коліс визначають [9] таким чином:

$$\tan \alpha_{ded1} = \frac{z_1 + z_2}{z_1} \cdot \tan \alpha_w - \frac{z_2}{z_1} \cdot \tan \alpha_{add2}, \quad (20)$$

$$\tan \alpha_{ded2} = \frac{z_1 + z_2}{z_2} \cdot \tan \alpha_w - \frac{z_1}{z_2} \cdot \tan \alpha_{add1}. \quad (21)$$

Тангенси кутів профілю ($\alpha_{low\lambda}$ і $\alpha_{high\lambda}$) для нижніх і верхніх граничних точок однопарного зачеплення на профілях зубів цих коліс визначають [9] за формулами:

$$\tan \alpha_{low\lambda} = \tan \alpha_{add\lambda} - \frac{2 \cdot \pi}{z_\lambda}, \quad (22)$$

$$\tan \alpha_{high\lambda} = \tan \alpha_{ded\lambda} + \frac{2 \cdot \pi}{z_\lambda}. \quad (23)$$

Згідно (15) ми отримали, по-перше, формули для розрахункових значень товщини зношеного шару біля нижніх і верхніх граничних точок однопарного зачеплення з боку ділянок однопарного та двопарного зачеплення (ці ділянки позначені верхнім індексом

"one" або "two" відповідно):

$$h_{low\lambda}^{one} = f_{low\lambda} \cdot U \cdot t \quad \text{і} \quad h_{high\lambda}^{one} = f_{high\lambda} \cdot U \cdot t, \quad (24)$$

$$h_{low\lambda}^{two} = k_{\alpha low\lambda}^{two} \cdot h_{low\lambda}^{one} \quad \text{і} \quad h_{high\lambda}^{two} = k_{\alpha high\lambda}^{two} \cdot h_{high\lambda}^{one}. \quad (25)$$

По-друге, ми отримали формули для розрахункових значень товщини зношеного шару біля нижніх активних точок ($h_{ded\lambda}$) профілів зубів і точок на колах вершин ($h_{add\lambda}$) коліс:

$$h_{ded\lambda} = k_{\alpha ded\lambda} \cdot f_{ded\lambda} \cdot U \cdot t, \quad (26)$$

$$h_{add\lambda} = k_{\alpha add\lambda} \cdot f_{add\lambda} \cdot U \cdot t, \quad (27)$$

Автори роботи [11] створили розрахункову модель для визначення розподілу повної сили взаємодії прямозубих коліс між двома парами зубів під час двопарного зачеплення. У цій моделі було враховано деформації згинання, зсуву та стиску в зубах, які перебувають у зачепленні, а також контактні деформації в обох парах зубів. В результаті автори роботи [11] встановили, що для прямозубих передач із різними числами зубів коліс можна приймати такі значення коефіцієнта $k_{\alpha\gamma\lambda}$:

$$k_{\alpha ded1} = k_{\alpha add2} \approx 0,36, \quad k_{\alpha add1} = k_{\alpha ded2} \approx 0,36 \quad \text{та} \\ k_{\alpha low1}^{two} = k_{\alpha high2}^{two} \approx 0,64, \quad k_{\alpha high1}^{two} = k_{\alpha low2}^{two} \approx 0,64.$$

Під час роботи прямозубої передачі процеси поверхневого руйнування відбуваються взаємопов'язано в таких точках евольвентного профілю зуба, відстань між якими не перевищує ширину прямокутника контакту. Тому в якості уточнених значень товщини зношеного шару в граничних точках однопарного зачеплення на евольвентному профілі зуба колеса λ доцільно прийняти середні значення товщини:

$$h_{low\lambda}^{aver} = \frac{h_{low\lambda}^{one} + h_{low\lambda}^{two}}{2} \quad \text{і} \quad h_{high\lambda}^{aver} = \frac{h_{high\lambda}^{one} + h_{high\lambda}^{two}}{2}.$$

Отже, з урахуванням наведених міркувань, на підставі виразів (24) і (25) ми запишемо формули для уточнених значень товщини зношеного шару в цих точках ($h_{low\lambda}^{aver}$ і $h_{high\lambda}^{aver}$) у такому вигляді:

$$h_{low\lambda}^{aver} = \frac{1 + k_{\alpha low\lambda}^{two}}{2} \cdot f_{low\lambda} \cdot U \cdot t, \quad (28)$$

$$h_{high\lambda}^{aver} = \frac{1 + k_{\alpha high\lambda}^{two}}{2} \cdot f_{high\lambda} \cdot U \cdot t. \quad (29)$$

Доречно зазначити, що у чисельному моделюванні процесу зношування активних поверхонь зубів пари прямозубих коліс, яке провели автори роботи [12], не було виявлено різких стрибків на графіках зміни розрахункової товщини зношеного

шару вздовж евольвентних профілів зубів цих коліс.

Для проектувального розрахунку прямозубої передачі, знаючи розташування пари коліс відносно опор валів, точність виготовлення основних деталей передачі та твердості активних поверхонь зубів, конструктор має прийняти [13] значення: відношення ширини зубчастих вінців до міжосьової відстані (ψ_{ba}) та відношення ширини зубчастих вінців до модуля зачеплення (ψ_{bm}). Розрахункову міжосьову відстань (a_w^{calc}) закритої прямозубої передачі зазвичай обчислюють за формулою, виведеною з умови контактної витривалості зубів коліс [13, 14]. Для застосування цієї формули необхідно знати такі початкові дані: обертальний момент (T_2) відносно осі веденого валу від системи розподілених нормальних зусиль у зачепленні, передаточне відношення (i_{12}) зубчастої передачі, а також визначити допустиме контактне напруження у розрахунку активних поверхонь зубів на контактну витривалість. Розрахункову міжосьову відстань, як правило, потрібно округлити до найближчого більшого значення (a_w) зі стандартного ряду міжосьових відстаней або з ряду нормальних лінійних розмірів, а потім обчислити ширину зубчастих вінців $b_w^{calc} = \psi_{ba} \cdot a_w$.

Мінімально необхідний модуль зачеплення можна обчислити за формулою, виведеною з умови згинальної витривалості зубів коліс. Але зазвичай, модуль зачеплення обчислюють [13] так: $m = b_w / \psi_{bm}$, і приймають його значення зі стандартного ряду модулів.

Числа зубів (z_1 і z_2) ведучого та веденого коліс прямозубої передачі із зовнішнім зачепленням отримують округленням їх розрахункових значень до натуральних чисел так, щоб при цьому справджувалась нерівність: $m \cdot (z_1 + z_2) \leq 2 \cdot a_w$. Розрахункові значення чисел зубів цих коліс (z_1^{calc} і z_2^{calc}) визначають [4] за формулами:

$$z_1^{calc} = \frac{2 \cdot a_w}{(|i_{12}| + 1) \cdot m}, \quad (30)$$

$$z_2^{calc} = z_1 \cdot |i_{12}|, \quad (31)$$

де $|i_{12}| = \left| \omega_1 / \omega_2 \right|$ – абсолютна величина передаточного відношення.

Якщо прямозуба евольвентна передача із зовнішнім зачепленням при визначених величинах m , z_1 і z_2 має міжосьову відстань a_w , то коефіцієнти x_1 та x_2 для її коліс пов'язані між собою таким чином: $x_2 = x_\Sigma - x_1$, причому кут зачеплення (α_w) і

коефіцієнт суми зміщень (x_Σ) твірного контуру для коліс цієї передачі визначають [9] за наступними формулами:

$$\alpha_w = \arccos \left(\frac{m \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot a_w} \cdot \cos \alpha_n \right), \quad (32)$$

$$x_\Sigma = \frac{(\tan \alpha_w - \alpha_w - \tan \alpha_n + \alpha_n) \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot \tan \alpha_n}. \quad (33)$$

Діапазони допустимих значень коефіцієнтів зміщення x_1 та x_2 обмежуються необхідністю виконання кількох вимог, зокрема: забезпечення достатнього коефіцієнту торцевого перекриття, забезпечення достатньої товщини зубів на циліндрах вершин та уникнення підрізання на ніжках зубів. Товщину зуба на циліндрі вершин прямозубого колеса із зовнішніми зубами визначають [15] за такою формулою:

$$s_{a\lambda} = m \cdot \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha_{add\lambda}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_\lambda \cdot \tan \alpha_n + z_\lambda \cdot (\tan \alpha_n - \alpha_n - \tan \alpha_{add\lambda} + \alpha_{add\lambda}) \right).$$

Результати досліджень

Права частина кожної з формул (26)–(29) являє собою добуток часу t , величини U (з розмірністю швидкості) та одного з нижченаведених безрозмірних співмножників, які будемо називати коефіцієнтами швидкостей зношування. Ці співмножники позначимо символами $\xi_{low\lambda}$ і $\xi_{high\lambda}$ для нижніх і верхніх граничних точок однопарного зачеплення та символами $\xi_{ded\lambda}$ і $\xi_{add\lambda}$ відповідно для нижніх активних точок евольвентних профілів зубів і точок на циліндрах вершин коліс. Отже, з урахуванням отриманих у роботі [11] значень коефіцієнтів $k_{\alpha Y\lambda}$, можемо записати:

$$\xi_{ded\lambda} = k_{\alpha ded\lambda} \cdot f_{ded\lambda} = 0,36 \cdot f_{ded\lambda}, \quad (34)$$

$$\xi_{add\lambda} = k_{\alpha add\lambda} \cdot f_{add\lambda} = 0,36 \cdot f_{add\lambda}, \quad (35)$$

$$\xi_{low\lambda} = \frac{1 + k_{\alpha low\lambda}^{two}}{2} \cdot f_{low\lambda} = 0,82 \cdot f_{low\lambda}, \quad (36)$$

$$\xi_{high\lambda} = \frac{1 + k_{\alpha high\lambda}^{two}}{2} \cdot f_{high\lambda} = 0,82 \cdot f_{high\lambda}. \quad (37)$$

Величину найбільшого серед коефіцієнтів швидкостей зношування (при конкретних значеннях коефіцієнтів зміщення твірного контуру) позначимо через F , тобто

$$F = \max \begin{pmatrix} \xi_{ded1}; \xi_{low1}; \xi_{high1}; \xi_{add1}; \\ \xi_{ded2}; \xi_{low2}; \xi_{high2}; \xi_{add2} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Добутки $(\xi_{ded\lambda} \cdot U)$, $(\xi_{low\lambda} \cdot U)$, $(\xi_{high\lambda} \cdot U)$, $(\xi_{add\lambda} \cdot U)$, очевидно, являють собою швидкості збільшення товщини зношеного шару з часом роботи прямозубої передачі, тому ми будемо називати їх швидкостями зношування в околі відповідних характерних точок на евольвентних профілях зубів пари прямозубих коліс (на стадії усталеного процесу зношування).

Аналіз формул (14), (18)-(23), (32) і (33) дозволяє встановити, що у прямозубої передачі з визначеними міжосьовою відстанню (a_w), шириною (b_w) зубчастих вінців, модулем зачеплення (m), числами зубів (z_1 і z_2), за відомого співвідношення твердостей (H_{B2}/H_{B1}) поверхневого шару зубів ведучого та веденого коліс, безрозмірні величини f_{ded1} і f_{ded2} , f_{low1} і f_{low2} , f_{high1} і f_{high2} , f_{add1} і f_{add2} є функціями від коефіцієнта зміщення x_1 твірного контуру ведучого колеса. Тоді з виразу (38) з урахуванням (34)-(37) випливає, що для такої передачі величина $F(x_1)$ також є функцією від коефіцієнта зміщення x_1 . З формули (13) очевидно, що для такої передачі величина U не залежить від коефіцієнтів зміщення x_1 та x_2 .

Тоді стає зрозуміло, що при зміні коефіцієнта зміщення x_1 у допустимому діапазоні найбільша серед швидкостей зношування в околі характерних точок евольвентних профілів зубів набуде свого мінімуму за такого значення x_{1R} , яке мінімізує безрозмірну функцію $F(x_1)$, тобто $F_{min} = F(x_{1R})$; тоді відповідне значення $x_{2R} = x_\Sigma - x_{1R}$.

Обговорення

Розглянемо приклад застосування розробленої методики визначення коефіцієнтів зміщення твірного контуру в проектувальному розрахунку прямозубої передачі із зовнішнім зачепленням. Передаточне відношення $|i_{12}| = 4$; ведуче і ведене колеса цієї передачі виготовлено зі сталі 35ХМ; термічна обробка обох коліс – поліпшення та гартування з нагріванням струмами високої частоти; твердість зубів цих коліс на поверхні 48HRC.

Нехай для проектування було обрано значення $\psi_{ba} = 0,315$ і $\psi_{bm} = 16,5$ та обчислено розрахункову міжосьову відстань $a_w^{calc} = 137$ мм. Приймаємо зі стандартного ряду міжосьових відстаней фактичне значення $a_w = 140$ мм. Тоді розрахункова ширина

зубчастих вінців $b_w^{calc} = 44,1$ мм; приймаємо фактичне значення $b_w = 45$ мм з ряду нормальних лінійних розмірів. Обчисливши розрахункове значення модуля зачеплення, приймаємо з ряду стандартних значень модулів $m = 2,75$ мм.

За формулою (30) знаходимо розрахункове значення $z_1^{calc} = 20,4$; призначаємо число зубів ведучого колеса $z_1 = 20$; тоді за формулою (31) визначаємо число зубів веденого колеса $z_2 = 80$. За формулами (32) і (33) визначаємо $\alpha_w = 0,39522$ рад, $x_\Sigma = 0,9679$.

Для прямозубої передачі, в якій $z_1 = 20$, $z_2 = 80$, $x_1 + x_2 = x_\Sigma = 0,9679$ та $H_{B2} = H_{B1}$, ми побудували графіки залежностей коефіцієнтів швидкостей зношування ($\xi_{ded\lambda}$, $\xi_{low\lambda}$, $\xi_{high\lambda}$, $\xi_{add\lambda}$) для характерних точок на евольвентних профілях зубів ведучого (рис. 1) та веденого (рис. 2) коліс від коефіцієнта зміщення (x_1) твірного контуру ведучого колеса.

Далі, застосувавши метод золотого перерізу [16], знаходимо раціональне значення $x_{1R} = 0,5829$, за якого найбільший серед коефіцієнтів швидкостей зношування, тобто функція $F(x_1)$, набуває свого мінімуму $F_{min} = 0,22$; тоді відповідне раціональне значення $x_{2R} = 0,385$.

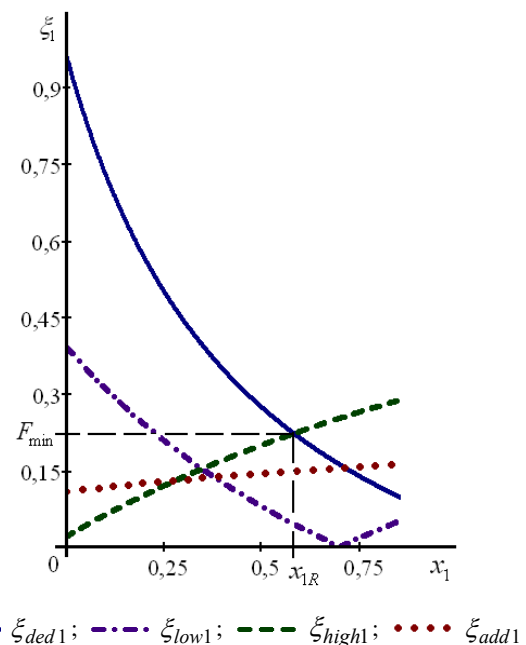


Рисунок 1. Графік залежностей коефіцієнтів швидкостей зношування ξ_1 від коефіцієнта зміщення x_1 для ведучого прямозубого колеса у прикладі

Ми визначили також границі діапазонів для коефіцієнтів зміщення x_1 та x_2 , при яких функція $F(x_1)$ перевищує її мінімальне значення F_{\min} не більше, ніж на 33%, та виконуються необхідні вимоги для пари прямозубих коліс.

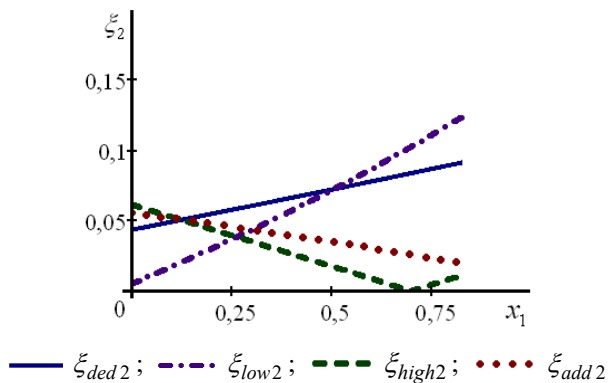


Рисунок 2. Графік залежностей коефіцієнтів швидкостей зношування ξ_2 від коефіцієнта зміщення x_1 для веденого прямозубого колеса у прикладі

Для розглянутої в нашому прикладі прямозубої передачі (з геометричними параметрами $z_1 = 20$, $z_2 = 80$, $m = 2,75$ мм, $a_w = 140$ мм, при $H_{B2} = H_{B1}$) такими діапазонами є: $0,4684 < x_1 < 0,7746$ і $0,4995 > x_2 > 0,1933$. У цих діапазонах граничні значення коефіцієнтів $x_1 = 0,4684$ та $x_2 = 0,4995$ визначено з умови, що $F(0,4684) = 4 \cdot F_{\min} / 3$, а граничні значення $x_1 = 0,7746$ та $x_2 = 0,1933$ визначено з умови [4], що товщина зубів на циліндрі вершин ведучого колеса має бути більшою, ніж $(0,4 \cdot m)$.

Висновки

Створено методику розрахунку таких значень коефіцієнтів зміщення твірного контуру для ведучого та веденого коліс циліндричної прямозубої передачі, за яких набуває свого мінімального значення найбільша швидкість зношування на активних поверхнях зубів цих коліс. Якщо коефіцієнти x_1 та x_2 визначено за розробленою методикою, то буде максимальною тривалість роботи цієї передачі до досягнення допустимого значення товщини зношеного шару на найбільш підданих до зношування ділянках евольвентних поверхонь зубів. Ця методика дозволяє визначати раціональні значення коефіцієнтів зміщення твірного контуру для коліс прямозубих передач, які функціонують в умовах неповної захищеності зони зачеплення зубів від потрапляння абразивних часток.

Список літератури

1. Kragelsky, I. V. Friction and Wear. Calculation Methods / I. V. Kragelsky, M. N. Dobychin, V. S. Kombalov. – Oxford : Pergamon Press, 1982. – 464 p. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-03333-6>
2. Когаев, В. П. Прочность и износостойкость деталей машин [Текст] / В. П. Когаев, Ю. Н. Дроздов. – М. : Высшая школа, 1991. – 319 с.
3. Hills, D. A. Mechanics of Elastic Contacts / D. A. Hills, D. Nowell, A. Sackfield. – Oxford : Butterworth-Heinemann, 1993. – 496 p. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-24029-3>
4. Брагин, В. В. Проектирование высоконапряженных цилиндрических зубчатых передач [Текст] / В. В. Брагин, Д. Н. Решетов. – М. : Машиностроение, 1991. – 224 с.
5. Попович, О.Г. Коригування пари циліндричних косозубих коліс для зменшення зношування евольвентних поверхонь зубів [Текст] / О. Г. Попович, В. Г. Шевченко // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2023. – № 4. – С. 40–49. <https://doi.org/10.15588/1607-6885-2023-4-6>
6. Попович, А. Г. Методика расчета коэффициентов смещения для колес реверсивной эвольвентной зубчатой передачи [Текст] / А. Г. Попович, В. Г. Шевченко // Вісник двигунобудування. – 2015. – № 1. – С. 8–14.
7. Чернець, М. В. Дослідження умов зачеплення зубів циліндричної евольвентної передачі на контактну міцність, зношування і довговічність. Частина 1. Постійні умови взаємодії у некоригованому зачепленні [Текст] / М. В. Чернець, Ю. М. Чернець // Проблеми трибології. – 2014. – № 3. – С. 22–27.
8. Чернець, М. В. Дослідження умов зачеплення зубів циліндричної евольвентної передачі на контактну міцність, зношування і довговічність. Частина 2. Постійні умови взаємодії у коригованому зачепленні [Текст] / М. В. Чернець, Ю. М. Чернець // Проблеми трибології. – 2014. – № 4. – С. 6–16.
9. Справочник по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых и червячных передач / [И.А. Болотовский, В.И. Безруков, О.Ф. Васильева и др.]; под ред. И.А. Болотовского. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1986. – 448с.
10. Linke, H. Cylindrical Gears. Calculation, Materials, Manufacturing / H. Linke, J. Borner, R. Heb. – Munich: Carl Hanser Verlag, 2016. – 848 p. <https://doi.org/10.3139/9781569904909>
11. Sanchez, M. B. Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects / M. B. Sanchez, M. Pleguezuelos, J. I. Pedrero // Mechanism and Machine Theory. – 2017. – Vol. 109. – P. 231–249.

- <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.11.014>
12. Flodin, A. Simulation of mild wear in spur gears / A. Flodin, S. Andersson // *Wear*. – 1997. – Vol. 207. – P. 16–23. [https://doi.org/10.1016/S0043-1648\(96\)07467-4](https://doi.org/10.1016/S0043-1648(96)07467-4)
13. Иванов, М. Н. Детали машин [Текст] / М. Н. Иванов. – 5-е изд., перераб. – М. : Высшая школа, 1991. – 383 с.
14. Павлице, В. Т. Основы конструирования та розрахунок деталей машин [Текст] / В. Т. Павлице. – 2-е вид., перероб. – Львів : Афіша, 2003. – 560 с.
15. Теория механизмов и механика машин / [К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов и др.]; под ред. К.В. Фролова. – 4-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 2003. – 496с.
16. Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації [Текст] / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 608 с.
- Одержано 02.09.2024

RATIONAL SHIFTS OF THE BASIC RACK'S PROFILE FOR WHEELS OF A CYLINDRICAL SPUR GEAR PAIR TO DECREASE TEETH WEAR

- Popovych A. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, National University Zaporizhzhia Polytechnic, Zaporizhzhia, Ukraine, e-mail: machinesmechanics@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4959-8838
- Shevchenko V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, National University Zaporizhzhia Polytechnic, Zaporizhzhia, Ukraine, e-mail: shevawk@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9037-6367

Purpose. It is to create a method for determination of such shift coefficients of the basic rack's profile for driving and driven wheels of a cylindrical spur gear pair; that during gear pair operation time the wear rate of a surface layer on the most wearing sections of the teeth' involute surfaces will be minimal.

Research methods are based on integrated application of the involute gear pair theory and tribological laws. The golden section method is used to minimize the function.

Results. We have obtained a dimensionless quantity, which is a function of shift coefficients of the basic rack's profile for driving and driven wheels of a cylindrical spur gear pair. Values of this function are proportional to the greatest wear rate in the neighborhood of characteristic points on teeth' involute profiles of these wheels. The method is created for determination of rational shift coefficients of the basic rack's profile, which minimize the obtained dimensionless function, and which maximize the service life of the spur gear pair until the greatest worn-layer thickness on the teeth' active surfaces reaches limiting permissible value.

Scientific novelty. It is proved, that increasing of the worn-layer thickness during spur gear pair operation time will be occurring most rapidly in the neighborhood of certain characteristic points on teeth' involute profiles of the wheels. Calculation model is elaborated for determination of the worn-layer thicknesses in the neighborhood of extreme active points on teeth' profiles of the cylindrical spur gear pair and in the neighborhood of the lowest and the highest bounding points of single-pair contact. This model takes into account the influence of specific slides and numbers of wheels' teeth as well as hardness values of teeth' surface layer on the wear rates at characteristic points of teeth' profiles. In addition, the model takes into account sharing of total force of the wheels interaction between two teeth pairs in double-pair contact and also a change of force transmitted by single pair of teeth when it comes into or go out of engagement.

Practical value. Application of the created method for determination of shift coefficients of the basic rack's profile is expedient in design of cylindrical spur gear pairs for machines and equipment, which operate in conditions when ingress of abrasive particles in the teeth engagement region is possible. An example of application of this method in design calculation of the cylindrical spur gear pair is given.

Key words: involute gear pair, cylindrical spur gear wheel, worn layer, shift coefficient of the basic rack's profile.

References

1. Kragelsky, I. V., Dobychin, M. N., Kombalov V. S. (1982). Friction and Wear. Calculation Methods. Oxford : Pergamon Press, 464. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-03333-6>
2. Kogaev V. P. Drozdov, Yu. N. (1991). Prochnost' i iznosostoičnost' detalej mashin [Strength and Wear Resistance of Machine Parts]. Moscow : Vysshaya Shkola, 319.
3. Hills, D. A., Nowell, D., Sackfield A. (1993). Mechanics of Elastic Contacts. Oxford : Butterworth-Heinemann, 496.

<https://doi.org/10.1016/C2009-0-24029-3>

4. Bragin, V. V., Reshetov, D. N. (1991). *Proektirovanie vysokonapryazhennykh tsilindricheskikh zubchatykh peredach* [Design of Highly Loaded Cylindrical Gears]. Moscow : Mashinostroenie, 224.
5. Popovych, A. G., Shevchenko, V. G. (2023). Koryhuvannya pary tsylindrychnykh kosozybykh kolis dlya zmeshennya znoshuvannya evolventnykh poverkhon' zubiv [Correction of the cylindrical helical-gear wheel pair for wear decrease of teeth' involute surfaces]. *New materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering*, (4), 40–49.
6. Popovych, A. G., Shevchenko, V. G. (2015). Metodika rascheta koefitsientov smescheniya dlya koles reversivnoy evolventnoy zubchatoy peredachi [The technique of profile shift coefficients calculation for wheels of a reverse involute gearing]. *Herald of Aero-engine-building*, (1), 8–14.
7. Chernets, M. V., Chernets, Ju. M. (2014). Doslidzhennya umov zacheplennya zubiv tsylindrychnoyi evolventnoyi peredachi na kontaktnu mitsnist', znoshuvannya i dovgovichnist'. Chastyna 1. Postiyni umovy vzayemodiyi u nekoryhovanomu zacheplenni. [Investigation of teeth engagement conditions of cylindrical involute gear on contact strength, wear and durability. Part 1. Constant interaction conditions in non-corrected engagement] *Problems of Tribology*, 3, 22–27.
8. Chernets, M. V., Chernets, Ju. M. (2014). Doslidzhennya umov zacheplennya zubiv tsylindrychnoyi evolventnoyi peredachi na kontaktnu mitsnist', znoshuvannya i dovgovichnist'. Chastyna 2. Postiyni umovy vzayemodiyi u koryhovanomu zacheplenni [Investigation of teeth engagement conditions of cylindrical involute gear on contact strength, wear and durability. Part 2. Constant interaction conditions in corrected engagement]. *Problems of Tribology*, 4, 6–16.
9. Bolotovskiy, I. A., Bezrukov, V. I., Vasilieva, O. F., et al. *Spravochnik po geometricheskomu raschetu evolventnykh zubchatykh i chervyachnykh peredach* [Handbook for Geometrical Design of Involute Toothed and Worm Gears]. Moscow: Mashinostroenie, 448.
10. Linke, H., Borner, J., Heb, R. (2016). *Cylindrical Gears. Calculation, Materials, Manufacturing*. Munich: Carl Hanser Verlag, 848.
<https://doi.org/10.3139/9781569904909>
11. Sanchez, M. B., Pleguezuelos, M., Pedrero, J. I. (2017). Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects. *Mechanism and Machine Theory*, 109, 231–249.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.11.014>
12. Flodin, A., Andersson, S. (1997). Simulation of mild wear in spur gears. *Wear*, 207, 16–23.
[https://doi.org/10.1016/S0043-1648\(96\)07467-4](https://doi.org/10.1016/S0043-1648(96)07467-4)
13. Ivanov, M. N. (1991). *Detali mashin* [Machine Parts]. Moscow : Vysshaya Shkola, 383.
14. Pavlyshe, V. T. (2003). *Osnovy konstruyuvannya ta rozrakhunok detaley mashyn* [Fundamentals of design and calculation of machine parts]. Lviv, Ukraine : Afisha, 560.
15. Frolov, K. V., Popov, S. A., Musatov, A. K., Timofeyev, H. A., Nikonorov, V. A. (2003). *Teoriya mekhanizmov i mekhanika mashyn* [Mechanism Theory and Machine Mechanics]. Moscow, Russia : Vysshaya Shkola, 496.
16. Zhaldak, M. I., Tryus, Yu. V. (2005). *Osnovy Teoriyi i Metodiv Optyimizatsiyi* [Fundamentals of the Optimization Theory and Methods]. Cherkasy, Ukraine : Brama-Ukrayina, 608.