УДК 539.3

Антоненко Н. М. канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Національного університету «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна, *e-mail: antonenkonina.ua@gmail.com*, ORCID: 0000-0002-0427-6499

Ткаченко І. Г. канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики Запорізького національного університету, м. Запоріжжя, Україна, *e-mail: tig.phd81@gmail.com*, ORCID: 0000-0002-4232-2484

ТРИВИМІРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОЇ ПЛИТИ З НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

Мета роботи. *Отримати аналітичний вираз для обчислення температури в точках багатошарової плити при умові неідеального теплового контакту між її шарами та представити його в зручному для чисельної реалізації вигляді. Дослідити вплив коефіцієнту теплового опору на розподіл температури в шарах плити.*

Методи дослідження. *Для розв'язання поставленої задачі використано метод інтегральних перетворень (подвійне інтегральне перетворення Фур'є) та метод функцій податливості.*

Отримані результати. *У вигляді невласних інтегралів Фур'є отримано формули для обчислення температури в будь-якій точці багатошарової плити. Чисельні результати проведено для тришарових плит, на зовнішніх поверхнях яких задано рівномірно розподілене по квадрату теплове навантаження (інтенсивність теплового навантаження на нижній межі в 10 разів більше, ніж на верхній). Отримано розподіли температури, які ілюструють вплив коефіцієнту теплового опору на розподіл температури в точках нижніх меж першого та другого шарів. Збільшення коефіцієнту теплового опору призводить до зменшення температури в точках зазначених меж. Запропонований метод може бути використаний для визначення розподілу температури в плитах з будь-якою скінченою кількістю шарів.*

Наукова новизна. *Уперше методом функцій податливості розв'язано просторову задачу теплопровідності для шаруватої плити з неідеальним тепловим контактом між шарами. Раніше цим методом розв'язувались лише двовимірна та вісесиметрична задачі такого типу.*

Практична цінність. *Отримані результати можуть бути використані в якості тестових при проведенні аналогічних розрахунків іншими методами. При проектуванні шаруватих конструкцій, опираючись на результати чисельних розрахунків, можна підбирати їх елементи з необхідними тепловими характеристиками.*

Ключові слова: *багатошарова плита, температура, теплопровідність, неідеальний тепловий контакт, подвійне інтегральне перетворення Фур'є, функція податливості.*

Вступ

Елементи інженерних конструкцій часто експлуатуються в умовах високих або низьких температур. Це призводить до необхідності враховувати вплив температурного поля при розрахунках їх напружено-деформованого стану, але попередньо варто розв'язати відповідні задачі теплопровідності. Для об'єктів, що мають шарувату структуру, в основному розв'язуються задачі теплопровідності з ідеальним тепловим контактом між шарами. В реальності між шарами, що контактують, може знаходитись тонкий проміжний шар деякого матеріалу, тому серед крайових задач теплопровідності та термопружності істотний інтерес представляють задачі для багатошарових структур з неідеальним тепловим контактом між шарами. У представленій статті розглядається тривимірна стаціонарна задача теплопровідності для багатошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами.

Аналіз досліджень та публікацій

Плити представляють собою важливі елементи різноманітних інженерних споруд, тому дослідженню особливостей їх деформації, а особливо під впливом температур, присвячено багато робіт. Стаття [1] присвячена розрахунку двовимірних стаціонарних, періодичних по просторовій координаті, теплових полів у багатошарових плитах. Для розв'язання задачі використовується модифікація методу матриць податливості. Розв'язок шукається у вигляді рядів Фур'є по косинусам. У [2] наводиться аналітично-числовий метод розв'язування одновимірної статичної задачі термопружності для шаруватих плит при різних способах їх нагріву. Вважається, що коефіцієнти теплопровідності кубічно залежать від температури. Розв'язання задачі теплопровідності, незалежно від кількості шарів, зводиться до розв'язування одного або системи двох нелінійних алгебраїчних рівнянь. Дослідженню впливу стаціонарного термічного та механічного навантаження на багатошарові плити та балки присвячена робота [3]. Побудовано гомогенізовану модель, а розв'язок отримано на основі методу збурень. У [4] розроблено дві методики для аналізу теплообміну в багатошарових матеріалах з міжфазним термічним опором, який представляє собою міру теплового опору пере-

DOI 10.15588/1607-6885-2023-3-8

носу тепла, що викликане поверхнею розділу в композитах до теплового руху, коли тепло тече через нього. Авторами у [5] розв'язано задачу про моделювання теплових процесів в шаруватих тілах. Для цього використовується скінченно-елементна модель з анізотропними властивостями композитного матеріалу, яка враховує усі можливі граничні умови підведення тепла. Для зниження розмірності задачі використовується суперелементний підхід. У роботі [6] запропонована та обґрунтована схема розв'язування мішаної задачі для рівняння теплопровідності, коефіцієнти яких є кусково-неперервними, при умові ідеального теплового контакту між шарами. Для розв'язання використовувався метод Фур'є, де шукані розв'язки розкладаються в ряди Фур'є. Стаття [7] присвячена розв'язанню задачі теплопровідності для двовимірної анізотропної пластини з неоднорідними граничними умовами. Задача зводиться до диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами, яке розв'язується точно лише у найпростіших випадках. У [8] запропоновано метод розрахунку стаціонарних температурних полів у багатошаровій пластині складеної форми при впливі плівкових джерел тепла при умові, що на зовнішніх її поверхнях відбувається конвективний теплообмін. Розв'язок поставленої задачі отримано на основі методу занурення. Теплообмін у багатошарових сферичних композитних ламінатах, що армовані волокнами, досліджується в [9]. Для отримання точного розв'язку використовується метод розділення змінних та рекурсивний алгоритм Томаса.

Стаття [10] присвячена дослідженню термонапруженого стану багатошарових пластин неканонічної форми. Метод розв'язання базується на прийомі занурення складної області в область канонічної форми. Задана пластина неканонічної форми з довільними граничними умовами «занурюється» в пластину канонічної форми, причому умови навантаження допоміжної конструкції збігаються з умовами навантаження вихідної конструкції. На верхній та нижній поверхнях пластини відбувається конвективний теплообмін, а бічна поверхня вважається ідеально теплоізольованою. Досліджено температурні напруження у п'ятишаровій пластині складної форми при нагріванні плівковим джерелом тепла. Розв'язок шукається у вигляді тригонометричних рядів.

Роботи [11–13] присвячені вивченню теплових процесів у шаруватих тілах з неідеальним тепловим контактом між шарами. У представленій статті розглядається просторова стаціонарна задача теплопровідності для багатошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами у рамках моделі [13]. Задача розв'язується за допомогою методу функцій податливості. Раніше цим методом було розв'язано тривимірну задачу про термопружну деформацію багатошарової плити з ідеальним тепловим контактом [14] і двовимірну [15] та осесиметричну задачі з неідеальним типом теплового контакту між шарами [16].

Мета роботи

Розглядається просторова задача теплопровідності для n-шарової плити з неідеальним тепловим контактом між її шарами: на стиках сусідніх шарів різниці температур відповідних точок пропорційні їх тепловим потокам. Шари нумеруємо зверху вниз, починаючи з одиниці. Кожен шар характеризується товщиною h_k, коефіцієнтом теплопровідності k_{Tk} та теплового розширення α_{Tk}. На верхній та нижній межах плити задано закони розподілу температури.

Метою статті є отримання аналітичного виразу для температури в точках багатошарової плити при умові неідеального теплового контакту між її шарами та представлення його у зручному для чисельної реалізації вигляді.

У кожному шарі вводимо декартову систему координат $O_k x_k z_k$ так як показано на рис. 1.

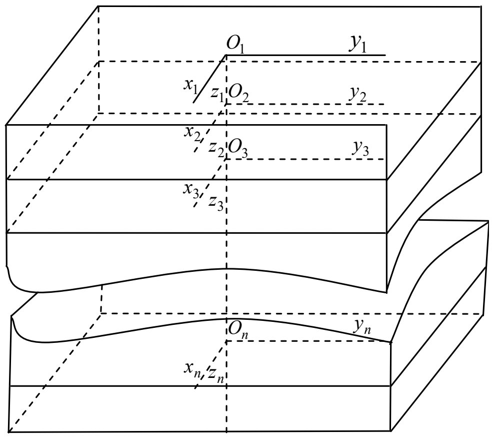

Рисунок 1. Багатошарова плита

Граничні умови задачі:

$$T_1(x,y,0)=f(x,y),\ T_n(x,y,h_n)=g(x,y).$$

Умови на спільних межах шарів [13]:

$$k_{Tk}\frac{\partial T_k}{\partial z}(x,y,h_k)=\frac{1}{R_k}\left[T_{k+1}(x,y,0)-T_k(x,y,h_k)\right],\quad (1),$$

$$k_{T\,k+1}\frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}(x,y,0)=k_{Tk}\frac{\partial T_k}{\partial z}(x,y,h_k),\qquad (2)$$

де R_k – коефіцієнт теплового опору, $k=\overline{1,n-1}$.

Матеріал і методика досліджень

Задача визначення температурного поля для стаціонарного ізотропного тіла зводиться до розв'язання диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0\ .$$

Задача розв'язується за допомогою подвійного інтегрального перетворення Фур'є за змінними x та y:

$$\bar f(\xi,\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{i(\xi x+\zeta y)}dxdy\ ,$$

DOI 10.15588/1607-6885-2023-3-8

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\xi,\zeta)e^{-i(\xi x+\zeta y)}d\xi d\zeta\ .$$

У просторі трансформант Фур'є температуру в точках кожного шару можна представити у вигляді лінійної комбінації двох допоміжних функцій

$$\eta_k(\xi,\zeta)=\overline{T}_k(\xi,\zeta,0) \text{ та } \varepsilon_k(\xi,\zeta)=\frac{1}{p}\frac{d\overline{T}_k}{dz}(\xi,\zeta,0)$$

цього шару [14]:

$$\overline{T}_k(\xi,\zeta,z)=\mathrm{ch}pz\,\eta_k+\mathrm{sh}pz\,\varepsilon_k\ ,$$

де $p=\xi^2+\zeta^2$.

Застосуємо до умов (1) та (2) пряме перетворення Фур'є, в результаті отримаємо рекурентні співвідношення між допоміжними функціями сусідніх шарів плити:

$$\eta_{k+1}(\xi,\zeta,0)=(C_k+L_k p\,S_k)\eta_k+(S_k+L_k p\,C_k)\varepsilon_k\ , \quad (3)$$

$$\varepsilon_{k+1}=\Delta_k\,(S_k\eta_k+C_k\varepsilon_k), \quad (4)$$

де $S_k=\mathrm{sh}p_k$, $C_k=\mathrm{ch}p_k$, $p_k=ph_k$, $L_k=R_k k_{T\,k}$, $\Delta_k=k_{T\,k}/k_{T\,k+1}$.

Доведемо, що ε_k є лінійною комбінацією η_k та η_{n+1}. Уведемо фіктивний шар з номером $n+1$, вважаючи, що контакт між n-м та $(n+1)$-м шаром ідеальний, матимемо: $T_{n+1}(x,y,0)=T_n(x,y,h_n)$. Застосуємо до останньої рівності пряме перетворення Фур'є, отримаємо:

$$\overline{T}_{n+1}(\xi,\zeta,0)=\overline{T}_n(\xi,\zeta,h_n)\ ,\ \eta_{n+1}=C_n\,\eta_n+S_n\,\varepsilon_n\ ,$$

$$\varepsilon_n=-\mathrm{cth}\,p_n\,\eta_n+\frac{1}{S_n}\eta_{n+1}\ . \quad (5)$$

Отже, ε_n є лінійною комбінацією η_n та η_{n+1}. Доведемо, що ε_k є лінійною комбінацією η_k та η_{n+1}.

У (4) покладемо $k=n-1$, матимемо:

$$\varepsilon_n=\Delta_{n-1}\,(S_{n-1}\,\eta_{n-1}+C_{n-1}\,\varepsilon_{n-1}). \quad (6)$$

Прирівняємо праві частини формул (5) та (6) і виразимо з отриманої рівності ε_{n-1}:

$$\varepsilon_{n-1}=-\frac{\Delta_{n-1}S_{n-1}+r_n(C_{n-1}+L_{n-1}pS_{n-1})}{\Delta_{n-1}C_{n-1}+r_n(S_{n-1}+L_{n-1}pC_{n-1})}\eta_{n-1}+$$
$$+\frac{F_n}{\Delta_{n-1}C_{n-1}+r_n(S_{n-1}+L_{n-1}pC_{n-1})}\eta_{n+1}\ .$$

Аналогічно, можна ε_{n-2} представити у вигляді комбінації η_{n-2} та η_{n+1}. Отже,

$$\varepsilon_k=-r_k\,\eta_k+F_k\,\eta_{n+1}\ , \quad (7)$$

де $r_k=r_k(p)$ – функції податливості термопружної плити. Для шару з номером n:

$$r_n=\mathrm{cth}\,p_n\ ,\ F_n=1/S_n\ .$$

Побудуємо рекурентні співвідношення для обчислення r_k. З одного боку, записавши співвідношення (7) для шару з номером $k+1$, з урахуванням формули (3), отримаємо:

$$\varepsilon_{k+1}=-r_{k+1}\,\eta_{k+1}+F_{k+1}\,\eta_{n+1}=$$
$$=-r_{k+1}\left[C_k-r_k\,S_k+L_k\,p\,(S_k-r_k\,C_k)\right]\eta_k+$$
$$+\left[-r_{k+1}\,(S_k+L_k p\,C_k)F_k+F_{k+1}\right]\eta_{n+1}\ .$$

З іншого боку, використовуючи співвідношення (4) та формулу (7), ε_{k+1} можна представити у вигляді:

$$\varepsilon_{k+1}=\Delta_k\,(S_k-r_kC_k)\eta_k+\Delta_k\,C_k\,F_k\,\eta_{n+1}\ .$$

Прирівняємо коефіцієнти при η_k та η_{n+1} у двох останніх співвідношеннях та виразимо з отриманих рівностей r_k через r_{k+1}, а F_k через F_{k+1}, отримаємо:

$$r_k=\frac{\Delta_kS_k+r_{k+1}(C_k+L_kpS_k)}{\Delta_kC_k+r_{k+1}(S_k+L_kpC_k)},$$

$$F_k=\frac{F_{k+1}}{\Delta_kC_k+r_{k+1}(S_k+L_kpC_k)}\ ,\ k=\overline{1,n-1}\ .$$

Оскільки $\lim\limits_{p\to\infty}r_k=1$, то для чисельної реалізації зручно ввести модифіковані функції податливості:

$$\tilde{r}_k=1-r_k\ .$$

Модифіковані функції податливості мають вигляд:

$$\tilde{r}_n=-\frac{e^{-p_n}}{S_n}\ ,$$

$$\tilde{r}_k=\frac{\left[\Delta_k+(1-\tilde{r}_{k+1})(L_kp-1)\right]e^{-p_k}}{\Delta_kC_k+(1-\tilde{r}_{k+1})(S_k+L_k\,p\,C_k)}\ ,\ k=\overline{1,n-1}\ .$$

Наведемо формули, які дозволяють обчислити функції $\overline{T}_k(\xi,\zeta,z)$ для будь-якого шару, якщо відома лише одна з допоміжних функцій цього шару:

$$\overline{T}_k(\xi,\zeta,z)=\left(e^{-p\,z}+\tilde{r}_k\,\mathrm{sh}pz\right)\eta_k+\mathrm{sh}\,pz\,F_k\,\eta_{n+1}\ . \quad (8)$$

Застосовуючи до (8) обернене перетворення Фур'є отримуємо аналітичний вираз для обчислення температури в будь-якій точці плити.

DOI 10.15588/1607-6885-2023-3-8

Результати досліджень

Чисельні розрахунки проведено для тришарової основи з параметрами шарів $h_1 = h_2 = h_3 = 1$. Граничні умови:

$$T_1(x, y, 0) = \begin{cases} T_0, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

$$T_1(x, y, 0) = \begin{cases} 10T_0, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases} \quad D: \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ -1 \le y \le 1. \end{cases}$$

На рис. 2–4 наведено розподіли температур в точках нижньої межі першого шару (тонка лінія) та в точках нижньої межі другого шару (товста лінія) в перерізі $x = 0$, які ілюструють вплив коефіцієнтів теплового опору та теплопровідності на ці розподіли. При розрахунках значення коефіцієнтів теплопровідності на межах шарів вважались рівними, тобто $R_1 = R_2 = R$.

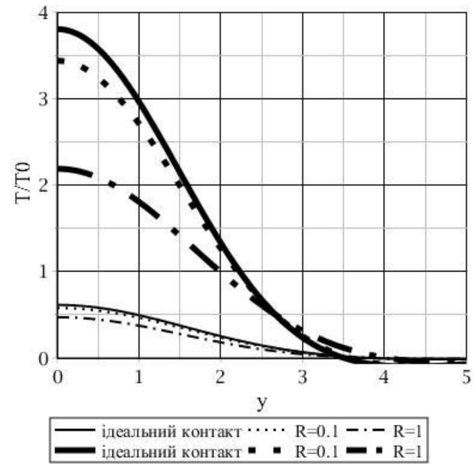

Рисунок 2. Розподіли температур у точках нижньої межі першого (тонка лінія) та другого (товста лінія) шарів тришарової плити при $k_{T2}/k_{T1} = 0{,}1$, $k_{T3}/k_{T1} = 1$

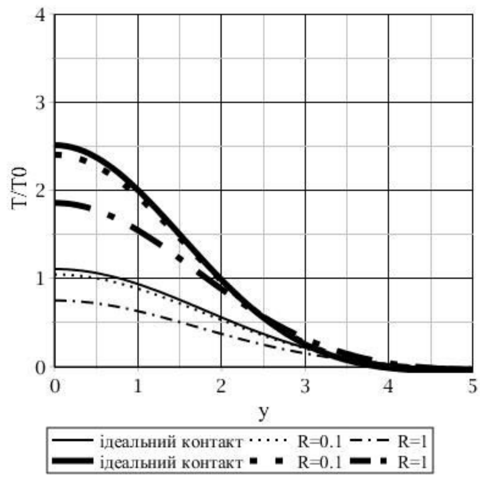

Рисунок 3. Розподіли температур у точках нижньої межі першого (тонка лінія) та другого (товста лінія) шарів тришарової плити при $k_{T2}/k_1 = 1$, $k_{T3}/k_{T1} = 1$

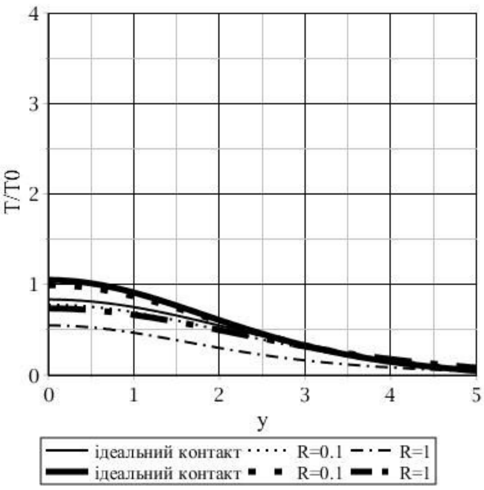

Рисунок 4. Розподіли температур у точках нижньої межі першого (тонка лінія) та другого (товста лінія) шарів тришарової плити при $k_{T2}/k_{T1} = 10$, $k_{T3}/k_{T1} = 1$

Обговорення

Із аналізу графіків розподілів температур у точках нижніх меж першого та другого шарів можна зробити такі висновки: збільшення коефіцієнтів теплового опору призводить до зменшення температури в точках зазначених меж; в точках нижньої межі другого шару наявність неідеального теплого контакту більш суттєво впливає на розподіл температури в порівнянні з його впливом на температурне поле в точках нижньої межі першого шару, отже, чим вище температура на поверхні плити, тим бульш суттєвий вплив вплив коефіцієнтів теплового опору на температурне поле; найменш суттєвим є вплив коефіцієнтів теплового опору для плити у якої коефіцієнт теплопровідності другого шару в 10 разів більше за аналогічний коефіцієнт для першого та третього шарів. Для контролю правильності отриманих результатів перевірялись умови рівності температур на стиках шарів для плит з ідеальним тепловим контактом, перевірялось, що при малих значеннях коефіцієнтів теплового опору розподіли температур прагнуть до відповідних розподілів, що відповідають ідеальному тепловому контакту.

Висновки

Побудовано точний аналітичний розв'язок тривимірної стаціонарної задачі теплопровідності для багатошарової плити з неідеальним тепловим контактом між її шарами. Отримані чисельні результати добре узгоджуються з фізичним сенсом. Надалі планується застосувати зазначений метод до багатошарових основ з більш істотною кількістю шарів та інших законів розподілу температури на поверхнях плити, а токож розв'язати тривимірну задачу термопружності для багатошарової плити з неідеальним тепловим контактом.

DOI 10.15588/1607-6885-2023-3-8

Список літератури

1. Бойко С. Аналітичний метод визначення теплових стаціонарних полів у шаруватих конструкціях / С. Бойко, О. Величко // Вісник ТНТУ: Мат. моделювання. Математика. Фізика. – 2015. – Т. 77, № 1. – С. 257–266.

2. Процюк Б. Ю. Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури / Б. Ю. Процюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 4. – С. 151–161.

3. Pelassa M. Explicit solutions for multi-layered wide plates and beams with perfect and imperfect bonding and delaminations under thermo-mechanical loading / M. Pelassa, R. Massabò // Meccanica. – 2015. – P. 2497–2524. DOI: 10.48550/arXiv.1503.04078

4. Wei-bin Yuan Heat transfer analysis in multi-layered materials with interfacial thermal resistance / Wei-bin Yuan, Nanting Yu, Long-Yuan Li, Yuan Fang // Composite Structures. – 2022. – 293. – 115728. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115728

5. Козуб Г. О. Моделювання теплових процесів в шаруватих тілах / Г. О. Козуб, Ю. Г. Козуб // Геотехнічна механіка. – 2020. – № 151. – С. 234–244. https://doi.org/10.15407/geotm2020.151.234

6. Тацій Р. М. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтами / Р. М. Тацій, О. О. Власій, М. Ф. Стасюк // Вісник нац. ун-ту «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки. – 2014. – № 804. – С. 64–69.

7. Yarimpabuç D. Heat Conduction Analysis of Two-Dimensional Anisotropic Plate / D. Yarimpabuç, E. Cihan, K. Çelebi, M. Eker // Çukurova University Journal of the Fakulty of Engineering and Architecture. – 2020. –35 (1). – P. 139–147.

8. Malykhina A. I. Stationary problem of heat conductivity for complex-shape multilayer plates / A. I. Malykhina, D. O. Merkulov, O. V. Postnyi, N. V. Smetankina // Вісник Харківського нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. – 2019. – Т. 41. – С. 46–54.

9. Norouzi M. A general exact solution for heat conduction in multilayer spherical composite laminates / M. Norouzi, A. Amiri Delouei, M. Seilsepour // Composite Structures. – 2013. – 106. – P. 288–295. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.005

10. Merkulova A. I. Calculation of the thermal stressed state of multilayer non-canonical form plates / A. I. Merkulova, D. O. Merkulov, Ie. Yu. Misiura, O. V. Postnyi // Вісник Харківського нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. Мат. моделювання. Інформ. технології. Автоматизовані системи управління. – 2021. – Т. 49. – С. 76–82.

11. Беляков Н. С. Неидеальный тепловой контакт тел при трении / Н. С. Беляков, А. П. Носко. – Москва : Книжный дом «Либроком», 2010. – 104 с.

12. Гера Б. В. Математичне моделювання умов неідеального теплового контакту шарів через тонке включення з джерелами тепла / Б. В. Гера // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2013. – Вип. 8. – С. 61–72.

13. Nemish B. Yu. Three-dimensional thermoelasticity problems for nonuniformly heated laminar transversally isotropic plates / B. Yu. Nemish // Int. Appl. Mech. – 1999. – 35, No. 7. – P. 732–740. https://doi.org/10.1007/BF02682211.

14. Величко І. Г. Просторова та осесиметрична термопружна деформація багатошарової основи / І. Г. Величко, І. Г. Ткаченко // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8. – 2, № 6/2. – С. 36–43.

15. Antonenko N. Plane Thermoelastic Deformation of a Multilayer Foundation with Non-Ideal Thermal Contact between its Layers / N. Antonenko, I. Tkachenko // Materials Science Forum. – 2019. – 968. – P. 486–495. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.486

16. Антоненко Н. М. Осесиметрична термопружна деформація багатошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами / Н. М. Антоненко, І. Г. Ткаченко // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2021. – Т. 50. – С. 6–13. DOI: 10.26565/2304-6201-2021-50-01

Одержано 25.05.2023

DOI 10.15588/1607-6885-2023-3-8

THREE-DIMENSIONAL THERMAL CONDUCTIVITY PROBLEM FOR A MULTILAYER PLATE WITH IMPERFECT THERMAL CONTACT BETWEEN ITS LAYERS

Antonenko N. Ph. D., Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, National University "Zaporizhzhia Polytechnic", Zaporizhzhia, Ukraine, *e-mail: antonenkonina.ua@gmail.com,* ORCID: 0000-0002-0427-6499

Tkachenko I. Ph. D., Associate Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, Ukraine, *e-mail: tig.phd81@gmail.com,* ORCID: 0000-0002-4232-2484

Purpose. *It consists in obtaining an analytical expression for calculating the temperature at the points of a multilayer plate under the condition of imperfect thermal contact between its layers, presenting obtained formulas in a for convenient for numerical implementation and investigating the influence of the thermal resistance coefficient on the temperature distribution in the plate layers.*

Research methods. *To solve the given problem, the method of integral transformations (double integral Fourier transform) and the method of compliance functions were used.*

Results. *In the form of improper Fourier integrals the formulas for calculating the temperature at any point of the multilayer plate were obtained. Numerical results for three-layer plates were conducted, on the outer surfaces of which a thermal load that uniformly distributed over the square (the intensity of the thermal loads on the lower boundary is ten times more than on the upper one) was given. The graphs that illustrate the influence of the thermal resistance coefficients on the temperature distribution at the points of the lower boundaries of the first and second layers were obtained. It was shown that the raise of the coefficients of thermal resistance leads to decreasing of the temperature at the points of these boundaries. The proposed method can be used to determine the temperature at the points of the plates with any finite number of layers.*

Scientific novelty. *For the first time, the three-dimensional problem of thermal conductivity for the layered plate with imperfect thermal contact between its layers was solved by the method of compliance functions. Previously, only two-dimensional and axisymmetric problems of this type were solved by this method.*

Practical value. *The obtained results can be used as the test ones when performing analogous calculations by other methods. Based on the results of numerical calculations in designing layered structures, it is possible to select their elements with the necessary thermal characteristics.*

Key words: *multilayer plate, temperature, thermal conductivity, imperfect thermal contact, double integral Fourier transformation, compliance function.*

References

1. Boiko, S., Velychko, O. (2015). Analitychnyi metod vyznachennia teplovykh statsionarnykh poliv u sharuvatykh konstruktsiiakh [Analytical method for determining the stationary thermal fields in layered structures]. Bulletin of TNTU: Mathematical modeling. Mathematics. Physics. 77 (1), 257–266.

2. Protsiuk B. Yu. (2010). Statychni zadachi termopruzhnosti dlia sharuvatykh termochutlyvykh plyt za kubichnoi zalezhnosti koefitsiientiv teploprovidnosti vid temperatury [Static thermoelasticity problems for thermosensitive plates with cubic dependence of heat conductivity coefficients on temperature]. Mathematical methods and physicomechanical fields. 53 (4), 151–161.

3. Pelassa, M., Massabò, R. (2015). Explicit solutions for multi-layered wide plates and beams with perfect and imperfect bonding and delaminations under thermo-mechanical loading. Meccanica, 2497–2524. DOI: 10.48550/arXiv.1503.04078

4. Wei-bin, Y., Nanting, Y., Long-Yuan, L., Yuan F. (2022). Heat transfer analysis in multi-layered materials with interfacial thermal resistance. Composite Structures. 293, 115728. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115728

5. Kozub, H. O., Kozub, Yu. H. (2020). Modeliuvannia teplovykh protsesiv v sharuvatykh tilakh [Modeling of thermal processes in layered bodies]. Geo-Technical Mechanics. 151, 234–244. https://doi.org/10.15407/geotm2020.151.234

6. Tatsii, R. M., Vlasii, O. O., Stasiuk, M. F. (2014). Zahalna persha kraiova zadacha dlia rivniannia teploprovidnosti z kuskovo-zminnymy koefitsiientamy [General first boundary value problem for the heat equation with piecewise variable coefficients]. Visnyk nats. un-tu «Lvivska politekhnika». Fiz.-mat. nauky. 804, 64–69.

7. Yarimpabuç, D., Cihan, E., Çelebi, K., Eker, M., (2020). Heat Conduction Analysis of Two-Dimensional Anisotropic Plate. Çukurova University Journal of the Fakulty of Engineering and Architecture. 35 (1), 139–147.

DOI 10.15588/1607-6885-2023-3-8

8. Malykhina, A. I., Merkulov, D. O., Postnyi, O. V., Smetankina, N. V. (2019). Stationary problem of heat conductivity for complex-shape multilayer plates. Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems». 41, 46–54.

9. Norouzi, M., Amiri Delouei, A., Seilsepour, M. (2013). A general exact solution for heat conduction in multilayer spherical composite laminates. Composite Structures. 106, 288–295. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.005

10. Merkulova, A. I., Merkulov, D. O., Misiura, Ie. Yu., Postnyi, O. V. (2021). Calculation of the thermal stressed state of multilayer non-canonical form plates. Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems». 49, 76–82.

11. Belyakov N. S., Nosko, A. P. (2010). Neidealnyiy teplovoy kontakt tel pri trenii [Nonperfect thermal contact of friction bodies]. Moscow: Librocom, 104.

12. Hera, B. V. (2013). Matematychne modeliuvannia umov neidealnoho teplovoho kontaktu shariv cherez tonke vkliuchennia z dzherelamy tepla [Mathematical modelling of nonideal conditions for thermal contact of layers through thing inclusion with heat source]. Physico-mathematical modelling and informational. 18, 61–72.

13. Nemish, B. Yu. (1999). Three-dimensional thermoelasticity problems for nonuniformly heated laminar transversally isotropic plates. Int. Appl. Mech. 35 (7), 732–740. https://doi.org/10.1007/BF02682211.

14. Velychko, I. H., Tkachenko, I. H. (2014). Prostorova ta osesymetrychna termopruzhna deformatsiia bahatosharovoi osnovy [Spatial and axisymmetric thermoelastic deformation of a multilayer foundation]. Bulletin of Dnipropetrovsk University. Series: Mechanics. 2 (6/2), 36–43.

15. Antonenko, N., Tkachenko, I. (2019). Plane Thermoelastic Deformation of a Multilayer Foundation with Non-Ideal Thermal Contact between its Layers. Materials Science Forum. 968, 486–495. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.486

16. Antonenko, N. M., Tkachenko, I. H. (2021). Osesymetrychna termopruzhna deformatsiia bahatosharovoi plyty z neidealnym teplovym kontaktom mizh sharamy [Axisymmetric thermoelastic deformation of a multilayer plate with imperfect thermal contact of its layers]. Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems». 50, 6–13. DOI: 10.26565/2304-6201-2021-50-01

DOI 10.15588/1607-6885-2023-3-8