

УДК 539.312

Засовенко А. В.

канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Національного університету «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна,  
e-mail: zasov77@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1012-6742

Фасоляк А. В.

канд. фіз.-мат. наук, старший викладач кафедри кафедри вищої математики Національного університету «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна,  
e-mail: antfas@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5874-1368

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ, ЯКА ПІДКРІПЛЕНА ОБОЛОНКОЮ, ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

**Мета роботи.** Полягає у розробці математичної моделі пружного напівсередовища з циліндричною порожниною, підкріпленою оболонкою, та плитою, якою підкріплена поверхня напівсередовища на основі скінчено-елементного підходу. Проаналізувати нестационарний динамічний напружено-деформований стан даної механічної системи при вісесиметричних поверхневих навантаженнях, яке залежить від часу як одинична функція Хевісайда. Отримати розв'язок відповідної статичної задачі та на основі отриманих результатів обчислити коефіцієнт динамічності розглянутої механічної системи.

**Методи дослідження.** Метод скінчених елементів та  $\theta$ -метод Вільсона для розв'язання відповідного матричного динамічного рівняння, який дозволяє звести диференціальне матричне рівняння до ітераційної послідовності квазістатичних задач. Для отримання наближеного розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які виникають в процесі розв'язку статичної та послідовності квазістатичних задач, використовувався метод спряжених градієнтів.

**Отримані результати.** Розроблена скінченно-елементна модель механічної системи пружне напівсередовище з циліндричною порожниною, підкріпленою оболонкою, та плитою, якою підкріплена поверхня напівсередовища. Проаналізовано нестационарний динамічний напружено деформований стан даної механічної системи при поверхневих вісесиметричних навантаженнях. Отримано розв'язок відповідної статичної задачі. На основі отриманих результатів встановлено коефіцієнт динамічності розглянутої механічної системи.

**Наукова новизна.** Розроблений підхід дозволяє враховувати взаємний вплив циліндричної порожнини, підкріпленої оболонкою та плити, якою підкріплена поверхня напівсередовища під дією не стаціонарного динамічного навантаження, яке прикладене на поверхні плити.

**Практична цінність.** Розроблені математичні моделі та отримані результати можуть бути використані при проектуванні підземних споруд, зокрема стволів шахт.

**Ключові слова:** пружне напівсередовище, тонка циліндрична оболонка, плита, контактна задача, вісесиметрична динамічна задача, метод скінчених елементів.

### Вступ

Нині важливою практичною задачею є моделювання динамічних процесів у системі оболонка – пружне середовище. Зокрема, до таких розрахункових схем приводять задачі моделювання динаміки трубопроводів, тунелів, стволів шахт тощо. Тому задача дослідження динамічного напружено-деформованого стану пружного напівсередовища з циліндричною порожниною, підкріпленою тонкою пружною оболонкою, при динамічних поверхневих навантаженнях є актуальною.

Роботу присвячено дослідженню динамічного напружено-деформованого стану лінійно-пружного ізотропного однорідного напівсередовища, яке містить циліндричну порожнину, що підкріплена тонкою пружною оболонкою, та на поверхні підкріплено пружною плитою під дією динамічних поверхневих вісесиметричних навантажень. Ціль роботи – вивчити взаємний

вплив оболонки та плити, що розташована вздовж поверхні напівсередовища під дією нестационарних динамічних поверхневих навантажень та отримати коефіцієнт динамічності даної механічної системи. Розглянуто випадок, коли вісь оболонки перпендикулярна до площини, що обмежує напівсередовище. Вивчено поверхневих вісесиметричних навантажень які діють на ділянці поверхні плити. Навантаження залежать від часу як одинична функція Хевісайда. До теперішнього часу динамічні задачі для оболонок в пружному просторі розглядалися лише у випадку необмеженого середовища, або для плит (пластин) на суцільному середовищі. Також при дослідженні динамічних задач для пружного напівсередовища, підкріпленого пружною плитою не враховувався вплив вертикальної порожнини, підкріпленої оболонкою. Науковою новизною роботи є врахування взаємного впливу оболонки та

плити, розташованої на поверхні пружного напівсередовища під дією поверхневих динамічних навантажень. Для дослідження динамічного напружено-деформованого стану описаної механічної системи було застосовано метод скінчених елементів. Отримані результати проілюстровано графічно та проаналізовано.

### Аналіз досліджень та публікацій

На сьогодні досить добре досліджено динамічні процеси в циліндричних оболонках у необмеженому пружному середовищі. Таким задачам у стаціонарній постановці присвячена монографія [1]. У нестационарній постановці таким задачам присвячені роботи [2–6], причому у роботах [2, 3] для опису реакції простору застосовувалася наближена модель Власова-Пастернака, а роботах [4–6] динаміка простору описувалася точними рівняннями теорії пружності. Застосовані в цих роботах методи можна застосовувати для динамічних завдань оболонок в пружному напівсередовищі за умови, що навантаження діє на внутрішню поверхню оболонки на великій відстані від поверхні напівсередовища. У роботах [7, 8] розглянута вісесиметрична задача для пружного напівсередовища з циліндричним включенням при лінійно-сконцентрованому поверхневому навантаженні.

Також добре вивчені задачі стаціонарної та нестационарної взаємодії тонких пластин (плит) з пружними середовищами. Такого типу задач присвячена монографія [9]. В цій роботі акцент робиться на пластинах, які дискретно підкріплені ребрами жорсткості, але середовище припускається суцільним, тобто без порожнин.

Дана робота присвячена дослідженню динамічного напружено-деформованого стану пружного напівсередовища з циліндричною порожниною, що підкріплена тонкою пружною оболонкою, під дією вісесиметричних поверхневих навантажень. Передбачається, що вісь оболонки перпендикулярна межі напівсередовища. Також, припускається, що на поверхні напівсередовища розташована пружна плита. Розглядається навантаження, яке діє на поверхні плити. Схожа задача розглядалася у роботах [10, 11]. У роботі [11] припускалося, що поверхня напівсередовища жорстко зчеплена з абсолютно жорстким напівпростором. А в роботі [10] розглянута подібна механічна система, але з вільною поверхнею, тобто без плити. У даній роботі розглядається випадок, коли поверхня напівсередовища підкріплена пружною плитою. Припускалося, що нестационарне динамічне навантаження прикладене до поверхні плити. У даному випадку враховувався вплив порожнини, що підкріплена тонкою пружною оболонкою, на динамічний напружено-деформований стан вищеприписаної механічної системи.

### Мета роботи

Для аналізу нестационарного напружено-деформованого стану механічної системи пружне напівсере-

довище, плитою, на поверхні, та циліндричною оболонкою, побудована скінченно-елементна модель, яка враховує взаємний вплив середовища, плити та циліндричної оболонки та дозволяє обчислити коефіцієнт динамічності.

### Матеріал і методика досліджень

Розглядається вісесиметрична динамічна задача для нескінченно довгої тонкої пружної оболонки в лінійно-пружному, однорідному та ізотропному напівсередовищі, причому вісь оболонки перпендикулярна до площини, яка обмежує напівсередовище. Поверхня напівсередовища підкріплена тонкою пружною плитою. Нехай вищеприписана механічна система віднесена до нерухомої циліндричної системи координат  $\{r, \theta, x\}$ , але для даної вісесиметричної задачі всі величини не залежать від змінної  $\theta$ . Нехай внутрішній радіус оболонки дорівнює  $b$ , а зовнішній –  $a$ . Площина, яка обмежує напівсередовище, задається рівнянням  $x = 0$ , а яка обмежує плиту –  $x = -h$  (рис. 1). Для значень часу  $t < 0$  механічна система перебуває в стані спокою та вільна від напружень. Потім в момент часу  $t = 0$  в області  $r \leq d$ ,  $x = -h$  (на поверхні плити) прикладається імпульсивне, нормальне до поверхні плити навантаження інтенсивністю  $F_0$ , яке залежить від часу як однічна функція Хевісайда. Вважаємо, що контакт між оболонкою і напівсередовищем та плитою і напівсередовищем жорсткий, а зв'язок – двосторонній. Для порівняння результатів розглянуто відповідна статична задача.

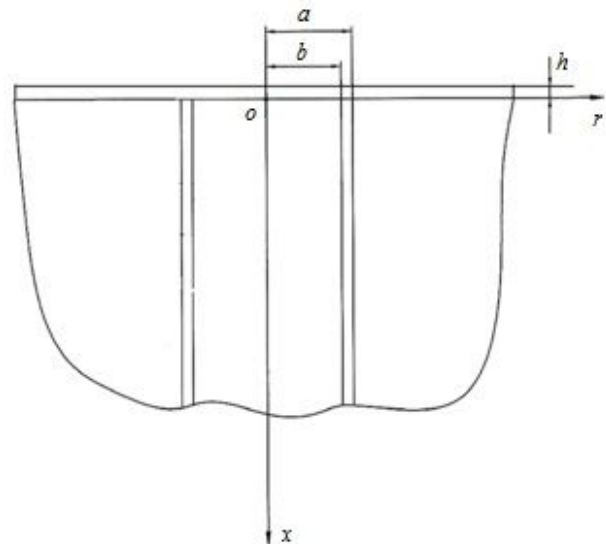


Рисунок 1. Геометрична модель задачі

Початкові умови вважаємо нульовими, тобто всішукані величинитаїх першіпохідні за змінною часу при  $t = 0$  рівні нулю.

Задачу розв'яжемо в безрозмірних величинах:

$$\begin{aligned} \{U_r^{(k)}, U_x^{(k)}\} &= \frac{1}{a} \{u_r^{(k)}, u_x^{(k)}\}; \lambda = \frac{a-b}{a}; \\ \{\bar{\sigma}_{rr}^{(k)}, \bar{\sigma}_{xx}^{(k)}, \bar{\sigma}_{rx}^{(k)}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(k)}\} &= \frac{1}{G_2} \{\sigma_{rr}^{(k)}, \sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{rx}^{(k)}, \sigma_{\theta\theta}^{(k)}\}; \\ F &= \frac{f}{G_2}; \{r_*, x_*\} = \frac{1}{a} \{r, x\}; \tau = \frac{c_s}{a} t; \kappa = \frac{h}{a}; \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \\ \gamma_1 &= \frac{G_3}{G_2}; \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \rho_1^* = \frac{\rho_3}{\rho_2}; c_s = \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{\rho_2}}; d^* = \frac{d}{a}; \end{aligned} \quad (1)$$

де  $u_r^{(k)}, u_x^{(k)}$  – радіальні та осьові переміщення точок оболонки ( $k=1$ ), напівсередовища ( $k=2$ ) та плити ( $k=3$ );  $\sigma_{rr}^{(k)}, \sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{rx}^{(k)}, \sigma_{\theta\theta}^{(k)}$  – радіальні, осьові, дотичні та кутові напруження;  $G_k, \rho_k$  – модулі зсуву та густина;  $F$  – динамічне поверхнєве нормальне навантаження.

Задачу розв’яжемо методом скінчених елементів (МСЕ). Для цього перейдемо до варіаційної постановки задачі.

Нехай  $\delta U^{(k)} = (\delta U_{r_*}^{(k)}, \delta U_{x_*}^{(k)})$  – додаткові можливі переміщення точок тіла  $\Omega$ . Тоді  $\delta \varepsilon^{(k)} = (\delta \varepsilon_{r_*r_*}^{(k)}, \delta \varepsilon_{x_*x_*}^{(k)}, \delta \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)}, \delta \varepsilon_{r_*x_*}^{(k)})$  – можливі безрозмірні деформації, які відповідають переміщенням  $\delta U^k = (\delta U_{r_*}^{(k)}, \delta U_{x_*}^{(k)})$  та задаються виразами:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{r_*r_*}^{(k)} &= \frac{\partial(\delta U_{r_*}^{(k)})}{\partial r_*}, \delta \varepsilon_{x_*x_*}^{(k)} = \frac{\partial(\delta U_{x_*}^{(k)})}{\partial x_*}, \\ \delta \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)} &= \frac{\delta U_{r_*}^{(k)}}{r_*}, \delta \varepsilon_{r_*x_*}^{(k)} = \frac{\partial(\delta U_{r_*}^{(k)})}{\partial x_*} + \frac{\partial(\delta U_{x_*}^{(k)})}{\partial r_*}. \end{aligned}$$

Нехай тіло знаходиться в стані рівноваги під дією поверхневих сил  $F$  та внутрішніх сил  $R$ , причому поверхнєві сили діють на поверхні  $\bar{\sigma}$ , яка обмежує тіло  $\Omega$ . Розглянемо варіаційне рівняння Лагранжа [12]:

$$\delta \bar{V}^{(k)} = 0, \quad (2)$$

де  $\bar{V}^{(k)} = \bar{U}^{(k)} + \Pi^{(k)}$  – повна безрозмірна потенційна енергія оболонки, напівсередовища та плити. Перетворимо вираз (2) наступним чином:

$$\delta \bar{V}^{(k)} = \delta(\bar{U}^{(k)} + \Pi^{(k)}) = \delta \bar{U}^{(k)} + \delta \Pi^{(k)},$$

де

$$\begin{aligned} \delta \bar{U}^{(k)} &= \iint_{\Omega} (\bar{\sigma}_{r_*r_*} \delta \varepsilon_{r_*r_*} + \bar{\sigma}_{x_*x_*} \delta \varepsilon_{x_*x_*} + \\ &+ \bar{\sigma}_{\theta\theta} \delta \varepsilon_{\theta\theta} + \bar{\sigma}_{r_*x_*} \delta \varepsilon_{r_*x_*}) d\Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\delta \Pi^{(k)} = - \iint_{\omega} (\delta U^{(k)})^T F d\omega - \iint_{\Omega} (\delta U^{(k)})^T R d\Omega. \quad (4)$$

Вираз (3) є варіацією безрозмірної енергії деформації, а (4) – варіація безрозмірної роботи зовнішніх сил. Тоді, згідно з варіаційним принципом Лагранжа [12], потрібно знайти такі значення переміщень  $\delta U^{(k)}$ , для яких повна енергія системи мінімальна, тобто такі переміщення, які задовольняють варіаційному рівнянню Лагранжа (2).

Для розв’язання задачі МСЕ проведемо спочатку дискретизацію тіла. Для цього розіб’ємо тіло на рис. 1 на трикутники, причому для оболонки, плити та напівсередовища використовуємо різні елементи. Далі для розв’язання віссиметричної задачі теорії пружності будемо використовувати елементи, отримані оберганням вищезгаданих трикутників навколо осі  $Ox$  [13]. Потім будемо матриці функцій форми для трикутників за схемою, описаною в [14]. Після знаходження матриці  $[\alpha]$  функцій форми елемента, матриця жорсткості елемента знаходиться за формулою [13]:

$$[K^e] = \int_V [\beta]^T [D] [\beta] dV = 2\pi \int_S r_* [\beta]^T [D] [\beta] dS, \quad (5)$$

де  $V$  – тіло, утворене оберганням трикутника  $S$  навколо осі  $Ox$ ; матриці  $[\beta]$  и  $[D]$  мають наступний вигляд вигляд [13]:

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial[\alpha]}{\partial r_*} \\ \frac{\partial[\alpha]}{\partial x_*} \\ [\alpha] \\ r_* \\ \frac{\partial[\alpha]}{\partial x_*} + \frac{\partial[\alpha]}{\partial r_*} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$[D] = g_k \begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} & \frac{2\nu_k}{1-2\nu_k} & \frac{2\nu_k}{1-2\nu_k} & 0 \\ \frac{2\nu_k}{1-2\nu_k} & \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} & \frac{2\nu_k}{1-2\nu_k} & 0 \\ \frac{2\nu_k}{1-2\nu_k} & \frac{2\nu_k}{1-2\nu_k} & \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де  $g_k = \begin{cases} \gamma, & k=1; \\ 1, & k=2; \\ \gamma_1, & k=3; \end{cases}$  тобто,  $g_k = \gamma$ , якщо відповідний

елемент належить оболонці,  $g_k = 1$ , якщо елемент належить напівсередовищу та  $g_k = \gamma_1$ , – елемент належить плиті. Блок матриці мас елемента обчислюється

за формулою [13]:

$$[M^e] = \int_V \rho^* [\alpha]^T [\alpha] dV = 2\pi \rho^* \int_S r_* [\alpha]^T [\alpha] dS, (8)$$

де  $\rho^* = 4$ , якщо відповідний елемент належить оболонці, або плиті та  $\rho^* = 1$  якщо елемент належить напівсередовищу.

Обчислення подвійних інтегралів у формулах (5) та (8) проводилося чисельно за допомогою квадратур Гауса на чотирьох вузлах для трикутника [15]. Обчислення еквівалентних вузлових сил проводиться за схемою, показаною в [14]. Для вирішення диференціального матричного рівняння застосовувався  $\theta$ -метод Вільсона [14]. Цей метод дозволяє звести диференціальне матричне рівняння до ітераційної послідовності квазістатичних задач. Для вирішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), які виникають при застосуванні МСЕ до статичних завдань, а також у квазістатичних задачах застосовувався метод спряжених градієнтів [6].

#### Результати дослідження та їх обговорення

Розглянемо динамічне навантаження  $F(r_*, \tau) = H(d^* - r_*)H(\tau)$ , яка діє по нормалі до поверхні плити на ділянці  $r_* \in [0, d^*]$ ,  $x_* = -\kappa$ . Навантаження залежить від часу як одинична функція Хевісайда. Аналогічні статичні навантаження прикладаються на тих самих ділянках поверхні.

Розрахунки були проведені для таких значень безрозмірних величин:

$$\kappa = 0,1; \lambda = 0,02; \gamma = \gamma_1 = 30; \rho^* = \rho_1^* = 4; d^* = 0,5.$$

Величини  $r_*, x_*, \tau$  змінювались.

На основі результатів, отриманих у роботі [10] та результатів чисельних експериментів встановлено, що без суттєвої втрати точності можна обмежити нескінченну розрахункову область (рис. 1) наступним чином:

$$x_* \leq 15; r_* \leq 10.$$

На рис. 2 проілюстровані осьові переміщення плити у точці  $x_* = 0, r_* = 0$  за змінною безрозмірного часу (крива 1) у порівнянні зі статичним розв'язком (крива 2). На основі отриманих даних можна визначити коефіцієнт динамічності, який дорівнює 1,53.

На (рис. 3 наведені графіки осьових та радіальних переміщень поверхні контакту плити та середовища в різні моменти часу у порівнянні із відповідними статичними переміщеннями вздовж радіальної змінної. На цьому та наступному рисунку: крива 1 – статичний розв'язок, крива 2 – переміщення при  $\tau = 2$ , 3 –  $\tau = 4$ , 4 –  $\tau = 6$ .

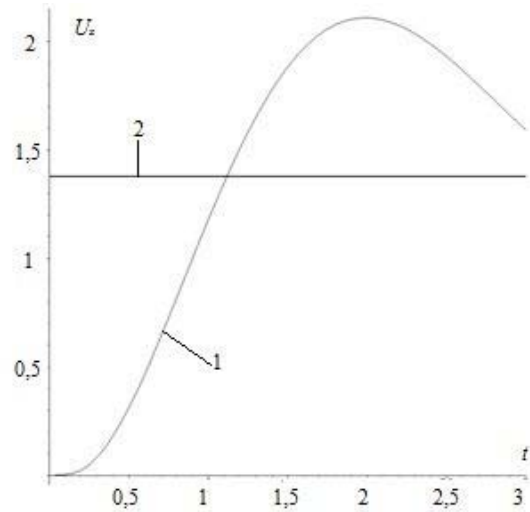


Рисунок 2. Осьові переміщення за змінною часу.

На рис. 4 проілюстровано криві осьових переміщень границі контакту оболонки та середовища за осьовою змінною.

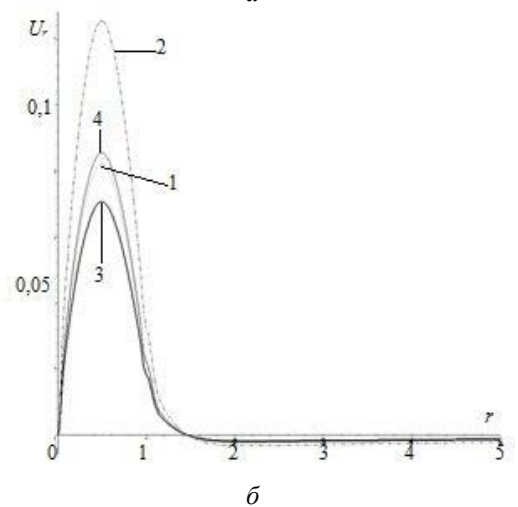
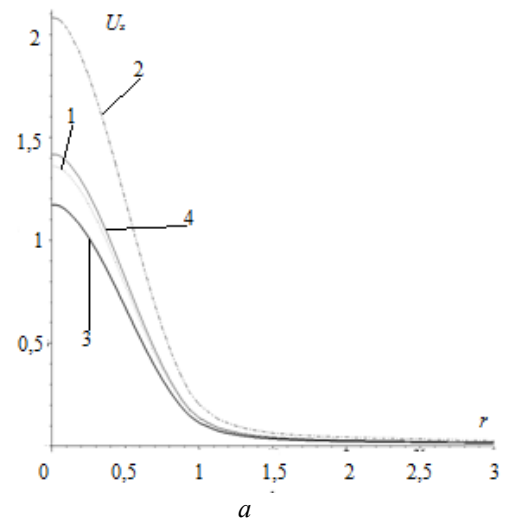
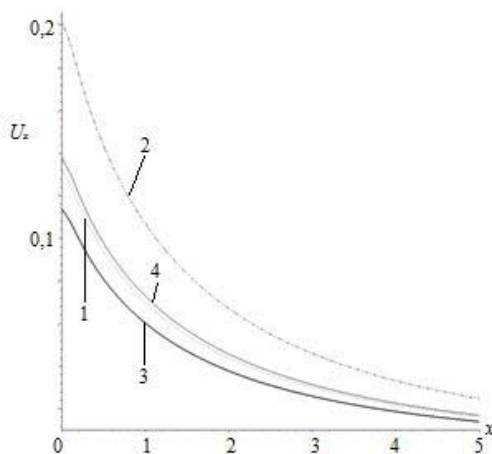


Рисунок 3. Переміщення поверхні контакту плити та середовища: а – осьові; б – радіальні



**Рисунок 4.** Осеві переміщення поверхні контакту оболонки та середовища

Радіальні переміщення границі контакту оболонки та середовища вздовж осової змінної мало відрізняються від нуля (у порівнянні з відповідними осовими переміщеннями), тому без суттєвої втрати точності можемо знехтувати ними.

З результатів можна зауважити збіжність динамічних розв'язків до відповідних статичних за змінною безрозмірного часу.

#### Висновки

Отримано розв'язок нестационарної динамічної та відповідної їй статичної задач для пружного напівсередовища з циліндричною порожниною, підкріпленою оболонкою, та поверхнею, підкріпленою плитою при дії нестационарних динамічних вісесиметричних поверхневих навантажень. Проаналізовано динамічний напружено-деформований стан за допомогою МСЕ. Отримані переміщення та напруження проілюстровані графічно. Встановлено коефіцієнт динамічності для вищеприписаної механічної системи. Отримані результати можуть бути застосовані для розрахунку підземних споруд, зокрема стволів шахт.

#### Список літератури

1. Горшков А. Г. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок. [Текст] / А. Г. Горшков, В. И. Пожуев – М. : Изд-во МАИ, 1992. – 136 с.
2. Пожуев В. И. Нестационарная реакция цилиндрической оболочки в упругой среде на действие неосимметрической подвижной нагрузки [Текст] / В. И. Пожуев, Мохаммед Жибитай // Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 6. – С. 330–37.
3. Пожуев В. И. Нестационарные колебания трубопровода конечной длины, односторонне взаимодействующего с инерционной средой [Текст] / В. И. Пожуев, Мохаммед Жибитай // Изв. ВУЗов. Строительство. – 1992. – № 4. – С. 84–50.
4. Пожуев, А. В. Нестационарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень

[Текст] / А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2015. – № 2. – С. 108–114.

5. Пожуев, А. В. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються [Текст] / А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 200–213.

6. Пожуев А. В. Математичні моделі та методи розрахунку нестационарної динаміки циліндричних оболонок у тривимірному пружному середовищі [Текст] / В. І. Пожуев, А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк – Запоріжжя: СТАТУС, 2019. – 152 с.

7. Johnson E. R. Propagation of axisymmetric waves in an elastic half-space containing a cylindrical inclusion. Part I: formulation and general integral solution [Text] / E. R. Johnson, R. Parnes // J. Mechanic and applied Mathematics. – 1977. – Vol. 30. № 3. – P. 235–253. DOI: <https://doi.org/10.1093/qjmam/30.3.235>

8. Johnson E. R. Propagation of axisymmetric waves in an elastic half-space containing a cylindrical inclusion. Part II: analysis of singularities, behavior of wave fronts and numerical results [Text] / E. R. Johnson, R. Parnes // J. Mechanic and applied Mathematics. – 1977. – Vol. 30. № 3. P. 255–268. DOI: <https://doi.org/10.1093/qjmam/30.3.255>

9. Пожуев А.В. Нестационарні процеси в пластинах і оболонках, які взаємодіють з тривимірним пружним середовищем [Текст] / В. І. Пожуев, А. В. Пожуев – Запоріжжя: Кругозор, 2015. – 226 с.

10. Фасоляк А. В. Динамика упругого полупространства с цилиндрической полостью, подкрепленной оболочкой, при осесимметричных нагрузках [Текст] / А. В. Фасоляк, В. И. Пожуев // Техническая механика. – 2017. – № 1. – С. 91–99 DOI: <https://doi.org/10.15407/itm2017.01.091>

11. Пожуев В. И. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією нормальних поверхневих навантажень [Текст] / В. І. Пожуев, А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 2. – С. 170–183.

12. Образцов И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов [Текст] / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Ч. С. Хазанов – М. : Высшая школа, 1985. – 393 с.

13. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов [Текст] / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 393 с.

14. Пожуев В. І. Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному півпросторі з вільною поверхнею [Текст] / В. І. Пожуев, А. В. Пожуев, А. В. Фасоляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2016. – № 1. – С. 119–126.

15. Bathe, K. J. Finite element procedures [Text] / K. J. Bathe – New Jersey: Prentice-Hall, 1996. – 1052 p.

Одержано 24.05.2023

## MATHEMATICAL MODELING OF THE DYNAMICS OF AN ELASTIC HALF-MEDIUM WITH A CYLINDRICAL CAVITY REINFORCED BY A SHELL UNDER AXISYMMETRIC LOADS

Zasovenko A. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Zaporizhzhia, Ukraine, e-mail: zasov77@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1012-6742

Fasoliak A. Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics, National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Zaporizhzhia, Ukraine, e-mail: antifas@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5874-1368

**Purpose.** The development of a mathematical model of an elastic semi-medium with a cylindrical cavity reinforced by a shell and a plate that reinforces the surface of the semi-medium based on the finite-element approach. The non-stationary dynamic stress-strain state of this mechanical system under axisymmetric surface loads, which depends on time as a unit Heaviside function was analyzed. The solution of the corresponding static problem was obtained. Based on the obtained results, the dynamic coefficient of the considered mechanical system was calculated.

**Research methods.** The finite element method and the Wilson  $\theta$  - method were used for solving static and the corresponding dynamic matrix equation correspondingly. The last one allows reducing the differential matrix equation to an iterative sequence of quasi-static problems. To obtain an approximate solution of systems of linear algebraic equations that take place in the process of solving static and a sequence of quasi-statistical problems, the conjugate gradients method was used.

**Results.** A finite-element model of the mechanical system of an elastic semi-medium with a cylindrical cavity reinforced by a shell and a plate reinforces the surface of the semi-medium was developed. The non-stationary dynamic stress-deformed state of this mechanical system under action of the surface axisymmetric loads was analyzed. The solution of the corresponding static problem was obtained. Based of the results has been obtained, the dynamic coefficient of the considered mechanical system was determined.

**Scientific novelty.** The developed approach allows to take into account the mutual influence of a cylindrical cavity reinforced by a shell and a plate that reinforces the surface of the semi-medium under the action of the non-stationary dynamic loads applied to the surface of the plate.

**Practical value.** The developed mathematical models and obtained results can be used in the design of underground structures, in particular mine shafts.

**Key words:** elastic half-medium, thin cylindrical shell, plate, contact problem, axisymmetric dynamic problem, finite element method.

### References

1. Gorshkov, A. G., Pozhuev, V. I. (1992). Plastiny i obolochki na inercionnom osnovanii pri dejstvii podvizhnyh nagruzok. [Plates and shells on an inertial base under the action of moving loads]. MAI, 136.
2. Pozhuev, V. I., Jibidai. M. (1991). Nestacionarnaya reakciya cilindricheskoj obolochki v uprugoj srede na dejstvie neosisimmetricheskoj podvizhnoj nagruzki [Non-stationary response of a cylindrical shell in an elastic medium to the action of a non-axisymmetric moving load]. Building and architecture, 6, 330–37.
3. Pozhuev, V. I., Jibidai. M. (1992). Nestacionarnye kolebaniya truboprovoda konechnoj dliny, odносторонне vzaimodejstvuyushogo s inercionnoj sredoj [Non-stationary oscillations of a pipeline of finite length, one-sidedly interacting with an inertial medium] Building, 4, 84–50.
4. Pozhuev, A. V., Fasoliak, A. V. (2015). Nestatsionarna nevisesymetrychna deformatsiia tsylindrychnoi obolonky u pruzhnomu prostori pid diieiu rukhomykh poverkhnevyyh navantazhen [Non-stationary non-axisymmetric deformation of a cylindrical shell in elastic space under the action of moving surface loads]. New materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering, 2, 108 – 114.
5. Pozhuev, A. V., Fasoliak, A. V. (2016). Nestatsionarna deformatsiia tsylindrychnoi obolonky u pruzhnomu prostori pid diieiu navantazhen, shcho rozshyriuiutsia [Non-stationary deformation of a cylindrical shell in an elastic space under the action of expanding loads]. Visnik of Zaporizhzhia national university. Physical and mathematical sciences, 1, 200–213.
6. Pozhuev, A. V., Pozhuev, V. I., Fasoliak, A. V. (2019). Matematychni modeli ta metody rozrakhunku nestatsionarnoi dynamiky tsylindrychnykh obolonok u tryvmirnomu pruzhnomu seredovyshchi [Mathematical models and methods for calculating the non-stationary dynamics of cylindrical shells in a three-dimensional elastic medium]. STATUS, 152.
7. Johnson, E. R., Parnes, R., (1977). Propagation of axisymmetric waves in an elastic half-space containing a

cylindrical inclusion. Part I: formulation and general integral solution. *J. Mechanic and applied Mathematics*, 30 (3), 235–253. DOI: <https://doi.org/10.1093/qjmam/30.3.235>

8. Johnson, E. R., Parnes, R. (1977). Propagation of axisymmetric waves in an elastic half-space containing a cylindrical inclusion. Part II: analysis of singularities, behavior of wave fronts and numerical results. *J. Mechanic and applied Mathematics*, 30 (3), 255–268. DOI: <https://doi.org/10.1093/qjmam/30.3.255>

9. Pozhuev, A. V., Pozhuev, V. I. (2015). Nestatsionarni protsesy v plastynakh i obolonkakh, yaki vziaemodiut z tryvymirnym pruzhnyim seredovyschem [Non-stationary processes in plates and shells interacting with a three-dimensional elastic medium]. *Krugozor*, 226.

10. Pozhuev, V. I., Fasoliak, A. V. (2017). Dinamika uprugogo poluprostranstva s cilindricheskoi polostyu, podkreplenoj obolochkoj, pri osesimmetrichnyh nagruzkah [Dynamics of an elastic half-space with a cylindrical cavity reinforced by a shell under axisymmetric loads]. *Technical mechanics*, 1, 91–99.

DOI: <https://doi.org/10.15407/itm2017.01.091>

11. Pozhuev, A. V., Pozhuev, V. I., Fasoliak, A. V.,

(2016). Nestatsionarna deformatsiia tsylindrychnoi obolonky u pruzhnomu prostori pid diieiu normalnykh pov-erkhnevyykh navantazhen [Non-stationary deformation of a cylindrical shell in an elastic space under the action of normal surface loads]. *Visnik of Zaporizhzhia national university. Physical and mathematical sciences*, 2, 170 – 183.

12. Obraztsov, I. F. (1985). Metod konechnykh elementov v zadachah stroitelnoj mehaniki letatelnykh apparatov [Finite elements method in aircrafts structural mechanics problems]. *Vysshaya shkola*, 393.

13. Segerlind, L. (1979). Primenenie metoda konechnykh elementov [Application of the finite element method], *Mir*, 393.

14. Pozhuev, A. V., Pozhuev, V. I., Fasoliak, A. V. (2016). Nestatsionarna deformatsiia tsylindrychnoi obolonky u pruzhnomu pivprostori z vilnoiu poverkhneiu [Non-stationary deformation of a cylindrical shell in an elastic half-space with a free surface]. *New materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering*, 1, 119–126.

15. Bathe, K. J. (1996). *Finite element procedures*, Prentice-Hall, 1052.