III МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В МЕТАЛУРГІЇ ТА МАШИНОБУДУВАННІ

УДК 539.3

Д-р техн. наук Гоменюк С. І. [1], д-р техн. наук Гребенюк С. М. [1], канд. фіз-мат. наук Грищак Д. Д. [2]

[1]Запорізький національний університет, м. Запоріжжя, [2] Центральний науково-дослідний Інститут озброєння та військової техніки Збройних Сил України, м. Київ

ЗАСТОСУВАННЯ ГІБРИДНИХ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ ТА СУЧАСНИХ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ ДЛЯ СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ ЗМІННИМИ У ЧАСІ ПАРАМЕТРАМИ

Актуальність. *Дослідження математичних моделей нелінійної динаміки конструкцій зі змінними у часі параметрами є актуальними з огляду на те, що такі моделі описують конструкції, які використовуються у різних галузях, зокрема у аерокосмічній сфері.*

Мета. *Отримання наближеного аналітичного розв'язку нелінійних вимушених коливань моделі конструкції з параметрами, залежними від часу.*

Метод. *Для отримання розв'язків застосовано гібридний підхід на базі методів збурення, фазних інтегралів, критерію ортогоналізації за Гальоркіним.*

Результати. С*пираючись на сучасні досягнення аналітичних, зокрема, асимптотичних і чисельних методів дослідження на базі існуючих програмних комплексів проведено нелокальне дослідження про особливості поведінки нелінійних систем. Не зважаючи на існування досить потужних чисельних програмних систем, для якісного аналізу нелінійних систем із змінними параметрами необхідні удосконалені математичні моделі на базі ефективних аналітичних, у тому числі наближених, розв'язків, які із застосуванням чисельних методів дають змогу надати достовірний аналіз досліджуваних конструкцій на етапі проектування. В результаті розв'язання нелінійної динамічної задачі отримано наближений розв'язок у аналітичному вигляді зі сталими коефіцієнтами, які залежать від початкових умов.*

Висновки. *З використанням отриманих співвідношень проведено порівняння результатів наближеного аналітичного і прямого чисельного розв'язків основного рівняння, які показали достатню кореляцію здобутого аналітичного розв'язку. Запропоновані алгоритм та програма візуалізації нелінійного динамічного процесу може бути запроваджено у суміжних задачах нелінійної динаміки систем з параметрами, залежними від часу.*

Ключові слова: *математична модель, нелінійна динаміка, аерокосмічна система, гібридний асимптотичний метод, нелінійна система із змінними параметрами.*

Вступ

Проблема нелінійних коливань конструкцій із змінними у часі параметрами є актуальною у інженерній практиці, включаючи аерокосмічні конструкції, космічні тросові системи, гнучкі маніпулятори, мости високошвидкісних трас із рухомими об'єктами та інші системи. До публікацій у цьому напрямку досліджень необхідно віднести результати аналізу [1–7], зокрема впливу наявності нелінійних складових у рівнянні коливань гнучкого тіла із концентрованою масою, залежною від часу, що є важливою проблемою з точки зору моделювання динамічних ефектів літальних апаратів.

Спеціальна увага приділяється математичній моделі та методу дослідження задачі нелінійної динаміки обертового маятника з довжиною і масою, залежними від часу, при заданому характері зовнішнього навантажен-

© Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Грищак Д. Д., 2020
DOI 10.15588/1607-6885-2020-2-9

ня на основі гібридного асимптотичного підходу з порівнянням здобутого аналітичного розв'язку з прямим чисельним інтегруванням основного рівняння задачі. Ця математична модель може розглядатися в якості фундаментальної у ряді досліджень нелінійної динаміки конструкцій із змінними параметрами.

Задача нелінійної динаміки обертаючого математичного маятника розглядається в якості системи, яка складається з коливального шару, маса якого є функцію часу, що «вкладена» у внутрішню поверхню твердого тонкостінного двомірного тору радіусу $L(t)$: шар може без тертя сковзати у внутрішній поверхні тору, а сам тор може обертатися з кутовою швидкістю Ω, в загальному випадку залежною від часу. Суттєвим є з'ясування впливу характеру зміни параметрів маятника у часі та введення нового степеня свободи, а саме обертання тороїдальної оболонки із заданою швидкістю, на динамічну поведінку системи.

Для здобуття аналітичного розв'язку нелінійних задач механіки, враховується, як правило, лише кубічна складова шуканої функції [1, 2]. Ефекти складових вищого порядку у більшості випадків ігноруються за виключенням, коли вони є предметом спеціального дослідження. Необхідно зазначити, що проблема візуального зображення нелінійного динамічного процесу має самостійне значення з точки зору запровадження сучасних комп'ютерних технологій. У даному досліджені аналіз математичних моделей нелінійної динаміки конструкцій із параметрами, залежними від часу, пропонується будувати на впровадженні гібридного асимптотичного підходу на базі асимптотичних методів збурення, методу фазних інтегралів у комбінації із принципом ортогоналізації за Гальоркіним [9–13], застосуванні комп'ютерної алгебри і чисельного алгоритму візуалізації нелінійного динамічного процесу [1, 14].

Формулювання проблеми. Наближений аналітичний розв'язок

В якості прикладу розглядається нелінійне диференціальне рівняння із змінними коефіцієнтами, яке описує нелінійний динамічний процес у формі:

$$\ddot{q}(\tau)+\omega_0^2(\tau)q(\tau)=\mu\left[\bar{f}(u,\xi_0)q^3(\tau)+\bar{\gamma}(u,\xi_0)q^5(\tau)\right]+ \\ +\widetilde{Q}_0(\xi)\sin\widetilde{\Omega}\tau=\mu N\left[q(\tau)\right]+Q(\xi,\tau). \quad (1)$$

Для одержання наближеного аналітичного розв'язку рівняння (1) застосовується гібридний асимптотичний підхід [2, 3], який базується на традиційному методі збурення за параметром нелінійності досліджуваної системи

$$q(\tau)=q_0(\tau)+\mu q_1(\tau). \quad (2)$$

і на другому кроці експлуатується апроксимація за методом фазних інтегралів (метод ВКБ) для отримання наближеного асимптотичного розв'язку системи сингулярних неоднорідних рівнянь із змінними коефіцієнтами за параметром при старшій похідній [8]:

$$\mu^0:\varepsilon^2\ddot{q}_0(\tau)+\overline{\omega}_0^2(\tau)q_0(\tau)=\overline{Q}(\xi,\tau), \quad (3)$$

$$\mu^1:\varepsilon^2\ddot{q}_1(\tau)+\overline{\omega}_0^2(\tau)q_1(\tau)=\overline{Q}(\xi,\tau)= \\ =\mu\left[\bar{f}(u,\xi_0)q_0^3(\tau)+\bar{\gamma}(u,\xi_0)q_0^5(\tau)\right]= \\ =\mu N\left[q_0(\tau)\right], \quad (4)$$

де

$$\varepsilon^2=\frac{1}{\pi^2},\ \overline{Q}(\xi,\tau)=\frac{1}{\varepsilon^2}Q(\xi,\tau). \quad (5)$$

Аналітичний розв'язок рівняння (1) отримується при початкових умовах

$$\left.\begin{aligned} q_0(0)&=1,\\ \dot{q}_0(0)&=0.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Система звичайних сингулярних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами $\overline{\omega}_0^2(\tau)$ розв'язується двочленною ВКБ апроксимацією. Остаточний наближений аналітичний розв'язок нелінійної проблеми вимушених коливань дається у вигляді:

$$q(\tau)=\frac{1}{\left[\overline{\omega}_0^2(\tau)\right]^{0,25}}\times \\ \times\left\{\sin K(\tau)\left[c_1+\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{\overline{Q}(\xi,\tau)\cos K(\tau)}{\dot{K}(\tau)}+\right.\right. \\ +\mu\int\frac{N(q_0(\tau)\cos K(\tau)}{\dot{K}(\tau)}d\tau+\cos K(\tau)\times \\ \times\left[c_2-\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{Q(\xi,\tau)\sin K(\tau)}{\dot{K}(\tau)}-\right. \\ \left.\left.\left.-\mu\int\frac{N(q_0(\tau)\sin K(\tau)}{\dot{K}(\tau)}d\tau+\cos K(\tau)\right]\right]\right\}, \quad (7)$$

де

$$K(\tau)=\int\varepsilon^{-1}\omega_0(\tau)d\tau. \quad (8)$$

Вказаний алгоритм застосовано, наприклад, для аналізу математичної моделі нелінійної динаміки обертового математичного маятника з довжиною і масою, залежними від часу при заданому характері зовнішнього навантаження.

В неінерціальній системі координат основне диференціальне рівняння задачі має вигляд [7]:

$$\frac{d^2\upsilon}{dt^2}+D'(t)\frac{d\upsilon}{dt}= \\ =\mu\left[\beta_0^2\varphi(t)\sin 2\upsilon-\frac{\sin\upsilon}{1+\psi(t)}\right]+\widetilde{F}(t), \quad (9)$$

де $\mu=\dfrac{g}{L_0}=\omega_0^2$ – параметр власної частоти коливань лінеарізованої системи;

$D(t) = \frac{\varphi'(t)}{[1+\varphi(t)]} + \frac{\psi(t)}{[1+\psi(t)]}$ – функція зміни маси та довжини маятника за часом;

$\phi(t) = [1+\eta(t)]^2$ – функція зміни швидкості обертання маятника від часу;

$\beta_0^2 = \frac{\Omega_0^2}{2\omega_0^2}$ – відносний параметр частот коливань;

$\widetilde{F}(t)$ – функція зовнішнього навантаження.

Розв'язок рівняння (3) має вигляд:

$$\upsilon_0(t) = \int\{\exp[-\int P(t)dt]\}\times$$
$$\times\left\{c_1 + \int\frac{\widetilde{F}(t)}{\exp[-\int P(t)dt]}dt\right\}+$$
$$+\left\{c_2 - \int\frac{\widetilde{F}(t)\int\{\exp[-\int P(t)dt]\}dt}{\exp[-\int P(t)dt]}dt\right\}. \qquad (10)$$

Довільні константи визначаються із початкових умов (3) і мають форму:

$$c_1 = \int\frac{\widetilde{F}(t)}{\exp[-\int P(t)dt]}dt,$$

$$c_2 = \int\frac{\widetilde{F}(t)\int\{\exp[-\int P(t)dt]\}dt}{\exp[-\int P(t)dt]}dt. \qquad (11)$$

Якщо нелінійну складову у правій частині рівняння (1) не розкладати у ряд Маклорена, то загальний розв'язок нелінійної задачі можна представити у формі:

$$\upsilon(t) = \int\{\exp[\int -P(t)dt]\}\times$$
$$\times\left\{s_1 + \int\frac{\widetilde{F}(t)dt}{\exp\int[-P(t)dt]}+\right.$$
$$\left.+\mu\int\frac{\beta_0^2\phi(t)\sin[2\upsilon_0(t)] - \frac{\sin[\upsilon_0(t)]}{1+\psi(t)}}{\exp\int[-P(t)]dt}\right\}+$$
$$+\left\{s_2 + \int\frac{\widetilde{F}(t)dt\int\exp[\int -P(t)dt]dt}{\exp\int[-P(t)dt]} - \right.$$
$$-\mu\int\frac{\int\exp[\int -P(t)dt]dt}{\exp\int[-P(t)dt]}\times$$
$$\left.\times\left[\beta_0^2\phi(t)\sin[2\upsilon_0(t)] - \frac{\sin[\upsilon_0(t)]}{1+\psi(t)}\right]dt\right\}. \qquad (12)$$

Прийнявши параметри досліджуваної системи за значеннями:

$$\phi(t) = (1+t)^{-2},\ L(t) = (1+t)^2,$$
$$\exp\left[-\int[P(t)dt]\right] = \frac{1}{(1+t)^2} \qquad (13)$$

розв'язок нелінійної задачі буде мати вираз:

$$\upsilon(t, \omega_1, \beta_0^2) = \left(-\frac{1}{1+t}\right)\left\{s_1 - \frac{\cos[\omega_1 t]}{\omega_1} + \right.$$
$$\left.+\mu\int[\beta_0^2\phi(t)\sin[2\upsilon_0(t)] - \sin[\upsilon_0(t)]dt\right\}+$$
$$+\left\{s_2 - \sin[\omega_1]Ci[\omega_1(1+t)] + \right.$$
$$+\cos[\omega_1]Si[\omega_1(1+t)] -$$
$$\left.-\mu\int\left[\sin[\upsilon_0(t)dt + \frac{\beta_0^2}{1+t}\sin[\upsilon_0(t)]\right]dt\right\}. \qquad (14)$$

Якщо ввести позначення у (14)

$$B(t) = \beta_0^2\phi(t)\sin[2\upsilon_0(t)] - \frac{\sin[\upsilon_0(t)]}{1+\psi(t)}, \qquad (15)$$

$$f(t) = \exp[-\int P(t)dt] \qquad (16)$$

розв'язок задачі отримується у формі

$$\upsilon(t) = \int f(t)dt\times$$
$$\times\left\{s_1 + \int\frac{\widetilde{F}(t)}{f(t)}dt + \mu\int\frac{B(t)}{f(t)}dt\right\}+$$
$$+\left\{s_2 + \int\frac{\widetilde{F}(t)\int f(t)dt}{f(t)}dt - \right.$$
$$\left.-\mu\int\frac{b(t)dtf(t)dt}{f(t)}dt\right\}, \qquad (17)$$

яка є більш оглядною та конструктивно зрозумілою. Довільні сталі s_1 і s_1 обчислюються із початкових умов. Деякі результати чисельного аналізу надані на рис. 1.

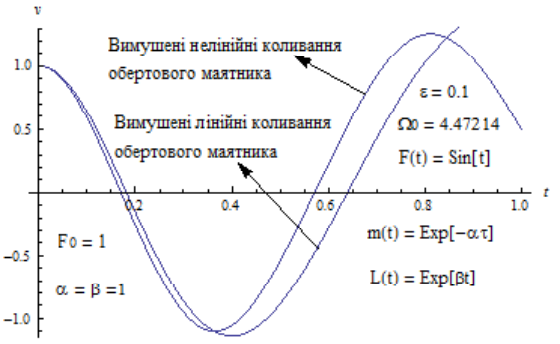

Рис. 1. Порівняння аналітичного та чисельного розв'язків для випадку вимушених коливань обертового маятника із змінними довжиною і масою за експоненціальним законом

Вказаний розв'язок може бути застосовано у досить широкому діапазоні задач нелінійної динаміки конструкцій із змінними у часі параметрами. Візуалізація нелінійного динамічного процесу конструкції із параметрами, залежними від часу, може бути реалізована на базі застосуванням об'єктно-орієнтованої мови програмування С++. В програмі реалізовано клас, який інкапсулює модель конструкції. Властивостями класу є параметри, які описують фізичні характеристики досліджуваної системи. Методами класу є функції, що реалізують розв'язання рівняння (1) із застосуванням вказаного алгоритму. Дана програма дозволяє надати візуалізацію досліджуваного процесу у графічній формі з схематичним зображенням конструкції. Отримані чисельні результати візуалізуються із застосуванням відкритої графічної бібліотеки OpenGL [12].

Резюме

У даному дослідженні надано наближений аналітичний розв'язок нелінійних вимушених коливань моделі конструкції з параметрами, залежними від часу. Застосовано гібридний підхід на базі методів збурення, фазних інтегралів, критерію ортогоналізації за Гальоркіним із застосуванням комп'ютерної алгебри та програмного забезпечення щодо візуалізації досліджуваних динамічних процесів. Співставлення результатів наближеного аналітичного і прямого чисельного розв'язків основного рівняння проблеми показують достатню кореляцію здобутого аналітичного розв'язку. Запропоновані алгоритм та програма візуалізації нелінійного динамічного процесу може бути запроваджено у суміжних проблемах нелінійної динаміки систем з параметрами, залежними від часу.

Список літератури

1. Gomenjuk S. I. To Mathematical modeling for nonlinear dynamics of spacecraft structures near-by the disturbed surface using hybrid asymptotic methods. Intern / Gomenjuk S. I., Gristchak D. D. // Journal of Mechanical Engineering and Information Technology. – 2017. – Vol. 05, Issue 05. – P. 1612–1615.
2. Modeling and Simulation of Flight Dynamics of Variable Mass System / [Quadrelli Marco B., Cameron Jonathan, Balaram Bob, Baranwal Mayank and etc.] // SPACE, Conference& Exposition, San-Diego, Ca, 4–7 August 2014.
3. Nonlinear Vibration Analysis of the Beam Carrying a Moving Mass Using Modified Homotopy / [Poorjamshidian M., Sheikhi J., Mahjioub-Moghadas S., Nakhaie M.] // Journal of Solid Mechanics. – 2014. – Vol. 6, 4. – P. 389–396.
4. Sadiku S. On the Dynamics of Elastic Systems with Moving concentration Masses / Sadiku S., Leipholz H. // Arch. Appl. Mech. – 1987. – 57. – P. 223–242.
5. Шваб'юк В. І. Дослідження вільних коливань стрижневих елементів зі змінними параметрами методом прямого інтегрування / Шваб'юк В. І., Крутій Ю. С., Сур'янінов М. Г //. Пробл. міцності. 2016. – № 3 (441). – С. 58–68.
6. Конюхов А. С. Влияние выбора имитационной модели ракеты-носителя «Циклон-4» на расчетные значения динамических характеристик / Конюхов А. С., Цыбенко А. С., Крищук Н. Г. // Пробл. прочности. – 2015. – № 3. – С. 99–105.
7. Николис Дж. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление / Николис Дж. – М. : Мир, 1989. – 486 с.
8. Грищак Д. Д. Математичні моделі нелінійної динаміки аерокосмічних систем на базі гібридних асимптотичних методів / Грищак Д. Д. // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2017. – № 1. – С. 110–119.
9. Azarskov V. F. An approximate analytical solution of dynamic problem of mathematical pendulum of variable mass and length / Azarskov V. F., Gristchak D. D.// Proc. X the Sixth World Congress "Safety in Aviation and Space Technologies", Kiev, Ukraine, September 23–25, 2013.
10. Грищак Д. Д. Управління вимушеними коливаннями обертового математичного маятника з довжиною і масою, залежними від часу / Грищак Д. Д. // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 2. – С. 69–81.
11. Geer J. F. Natural Frequency Calculations Using a Hybrid Perturbation Galerkin Technique / Geer J. F., Andersen C. V. // Pan American Congress on Appl. Mech. – 1991. – P. 571–574.
12. Грищак В. З. Гибридные асимптотические подходы к решению актуальных задач механики конструкций с переменными параметрами на базе современной компьютерной алгебры / Грищак В. З., Пожуев В. И., Грищак Д. В. // Вісник Дніпровського національного університету. Серія «Механіка». – Вип. 15, Т. 2. – С. 61–71.
13. Gristchak V. Z. A Hybrid WKB-Galerkin Method Applied to a Piezoelectric Sandwich Plate Vibration Problem Considering Shear Force Effects / Gristchak V. Z., Ganilova O. A. // Journal of Sound and Vibration. – 2008, 317, 1–2. – P. 366–377.
14. OpenGL – The Industry Standard for High Performance Graphics. URL: https://www.opengl.org.

Одержано 11.12.2020

Гоменюк С. И., Гребенюк С. Н., Грищак Д. Д. Применение гибридных асимптотических методов и современных программных средств для создания математических моделей нелинейной динамики конструкций с переменными во времени параметрами

Актуальность. *Исследования математических моделей нелинейной динамики конструкций с переменными во времени параметрами является актуальными исходя из того, что такие модели описывают конструкции, которые используются в разных отраслях, в частности в аэрокосмической сфере.*

Цель. *Получение приближенного аналитического решения нелинейных вынужденных колебаний модели конструкции с параметрами, зависящими от времени.*

Метод. *Для получения решений применен гибридный подход на базе методов возбуждения, фазовых интегралов, критерия ортогонализации по Галеркину.*

Результаты. *Опираясь на современные достижения аналитических, в частности, асимптотических и численных методов исследования на базе существующих программных комплексов проведено нелокальное исследование об особенностях поведения нелинейных систем. Несмотря на существование достаточно мощных программных систем, для анализа нелинейных систем с переменными параметрами необходимы усовершенствованные математические модели на базе эффективных аналитических, в том числе приближенных, решений, которые с применением численных методов позволяют предоставить достоверный анализ исследуемых конструкций на этапе проектирования. В результате решения нелинейной динамической задачи получено приближенное решение в аналитическом виде с постоянными коэффициентами, зависящими от начальных условий.*

Выводы. *С использованием полученных соотношений проведено сравнение результатов приближенного аналитического и прямого численного решений основного уравнения, которые показали достаточную корреляцию полученного аналитического решения. Предложенные алгоритм и программа визуализации нелинейного динамического процесса могут быть внедрены в смежных задачах нелинейной динамики систем с параметрами, зависящими от времени.*

Ключевые слова: *математическая модель, нелинейная динамика, аэрокосмическая система, гибридный асимптотический метод, нелинейная система с переменными параметрами.*

Homeniuk S., Grebenyuk S., Gristchak D. Application of hybrid asymptotic methods and modern software for mathematical models developing for nonlinear dynamics of structures with variables in time parameters

The relevance. *The aerospace domain requires studies of mathematical models of nonlinear dynamic structures with time-varying parameters.*

The aim of the work. *To obtain an approximate analytical solution of nonlinear forced oscillations of the designed models with time-dependent parameters.*

The research methods. *A hybrid approach based on perturbation methods, phase integrals, Galorkin orthogonalization criterion is used to obtain solutions.*

Results. *Nonlocal investigation of nonlinear systems behavior is done using results of analytical and numerical methods and developed software. Despite the existence of sufficiently powerful numerical software systems, qualitative analysis of nonlinear systems with variable parameters requires improved mathematical models based on effective analytical, including approximate, solutions, which using numerical methods allow to provide a reliable analysis of the studied structures at the stage designing. An approximate solution in analytical form is obtained with constant coefficients that depend on the initial conditions.*

Conclusions. *The approximate analytical results and direct numerical solutions of the basic equation were compared which showed a sufficient correlation of the obtained analytical solution. The proposed algorithm and program for visualization of a nonlinear dynamic process could be implemented in nonlinear dynamics problems of systems with time-dependent parameters.*

Key words: *mathematical model, nonlinear dynamics, aerospace system, hybrid asymptotic method, nonlinear system with variable parameters.*