ПРО МОЖЛИВІСТЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЦІНКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ПРИ НАЯВНОСТІ МІНІМАЛЬНОЇ КІЛЬКОСТІ ВИМІРІВ

При необхідності отримати однофакторну залежність для функції відгуку зазвичай використовують метод найменших квадратів з подальшим, за необхідністю, використанням методу планування експерименту або – метод кубічних сплайнів. Але, у випадку, коли кількість експериментальних точок є вкрай обмеженою, ці методи можуть статися неефективними [1].

Якщо існують тільки три надійні результати середніх значень експериментів щодо певних введених кількостей якогось конкретного елемента в металевий сплав, постає питання, наскільки можливо підібрати конкретну формулу математичної залежності, що базується на цих трьох мінімальних кількостях введеного елемента. Це стосується навіть тих випадків, коли побудова будь-яких надійних графіків здається на перший погляд майже неможливою.

Оскільки щодо трьох такого роду експериментальних точок існують тільки три варіанти залежностей, а саме: лінійної, ступеневої та показникової, можливо використати принаймні 2 підходи для знаходження найкращої математичної залежності із трьох можливих.

Перший підхід – це визначення коефіцієнтів лінійних залежностей осереднених результатів лінеаризованих вихідних функціональних залежностей вказаного типу. Для визначення конкретного значення коефіцієнта відповідного рівняння, використовують скорочений варіант методу найменших квадратів. Початкові значення коефіцієнтів лінійних рівнянь, що відповідають рівнянню типу $y = b_0 + b_1 \varepsilon_i$, де b_0 – середнє значення трьох вимірів y, а ε_i – це відхилення експериментальних значень здійснених вимірів від їх середніх результатів ($\varepsilon = x_i - \bar{x}$).

Такий підхід дає можливість знайти коефіцієнти b_0 і b_1, та емпіричні коефіцієнти лінійної кореляції (r) за формулами:

$$r = \frac{\sum_i^3 y_i \varepsilon_i}{\sqrt{(\sum_i^3 y_i^2 - 3\bar{y}^2) \cdot \sum_i^3 \varepsilon_i^2}}, \tag{1}$$

$$b_0 = \frac{\sum_i^3 y_i}{3}, \qquad b_1 = \frac{\sum_i^3 y_i \varepsilon_i}{\sum_i^3 \varepsilon_i^2}. \tag{2}$$

При цьому, похибки цих коефіцієнтів не залежать одна від одної, оскільки у цих випадках ($\overline{\Delta b_0}$)$\cdot$ ($\overline{\Delta b_1}$) = 0 [2].

$$\Delta b_0 = \sqrt{(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sum_i^3 \varepsilon_i^2}) \cdot \sum_i^3 \Delta_i^2}, \tag{3}$$

$$\Delta b_1 = \sqrt{\frac{\sum_i^3 \Delta_i^2}{\sum_i^3 \varepsilon_i^2}}. \tag{4}$$

де $\Delta_i^2 = [y_i - (b_0 + b_1 \cdot \varepsilon_i)]^2$.

Цей підхід повністю співпадає з результатами, отриманими при використанні методу лінійного планування в натуральному масштабі факторів, якщо використовувати єдиний вектор-стовпчик результатів, який задовольняє умові симетричності. Дійсно, визначення кутового коефіцієнту можна легко показати:

$$b_1 = \frac{\sum_i^3 y_i \varepsilon_i}{\sum^3 \varepsilon_i^2} = \frac{y_1\varepsilon_1 + y_2 \cdot 0 + y_3\varepsilon_3}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2} = \frac{y_3 - y_1}{2|\varepsilon|}, \text{ оскільки } |\varepsilon_1| = |\varepsilon_3| = \varepsilon .$$

DOI 10.15588/1607-6885-2019-1-15

Найбільший коефіцієнт кореляції, обраний із трьох варіантів дає можливість обрати надійну відповідну вихідну формулу певної функціональної залежності.

Додатковим підтвердженням цього факту (другий підхід), може стати порівняння значень знайдених функціональних залежностей, обрахованих з урахуванням їх середньоарифметичних, середньогеометричних значень, а також відхилень цих значень між собою (в порівнянні двох значень функцій відгуку для кожного випадку). Найменша різниця функцій відгуку певного типу залежності буде свідчити про правильність обрання певного типу математичної залежності.

Розглянемо такого роду методику на прикладі деякого конкретного випадку, а саме визначення границі міцності покриття на відрив залежно від кількості введеного легувального елемента. Вихідні дані щодо кількості легувального елемента (або суми легувальних елементів) та границі міцності на відрив показано у таблиці 1. Для виконання розрахунків за формулами 1–4 необхідно визначити відхилення значення параметра впливу x_i від середнього результату його трьох вимірів.

Як зазначено вище, для визначення коефіцієнту кореляції для всіх можливих залежностей виконують лінеаризацію ступеневої та показникової функції із застосуванням принципів логарифмування. Рівняння лінеаризованих залежностей та визначений коефіцієнт кореляції за формулою 1 приведені у табл. 2.

Таблиця 1 – Вихідні дані для подальших розрахунків

Склад №	Кількість легувального елементу (x), %	Границя міцності на відрив, σ_B (y), МПа
1	0,1	23
2	0,3	15
3	0,5	19

Таблиця 2 – Функціональні залежності та коефіцієнти лінійної кореляції

Обрані залежності	$y = b_0 + b_1\varepsilon_i$	$y = b_0\varepsilon_i^{b_1}$	$y = b_0 b_i^{\varepsilon_i}$
Після лінеарізації	$y = b_0+b_1\varepsilon_i$	$y^* = b_0^*+b_I\varepsilon_i^*$	$y^* = b_0+b_1^*\varepsilon_i$
b_0 або b_0^*	19	2,93	2,93
b_1 або b_1^*	-10	-0,16	0,62
Коефіцієнт лінійної кореляції, r	0,05	0,62	0,45

Примітка. $y^* = \ln y_i$, $\varepsilon_i^* = \ln \varepsilon_i$, $b_1^* = \ln b_1$ *та* $b_0^* = \ln b_0$.

Аналізуючи отримані значення коефіцієнту лінійної кореляції, можна зробити висновок, що найбільш точно ці три точки описує ступенева крива $y = x^m$. Далі, виконують перевірку за другим методом використовуючи таблицю 3. Чим менше різниця між розрахованими значеннями, тим ближче крива описує отримані експериментальні точки. Отже, і за другим методом підтверджується висновок, що найоптимальнішою залежністю є ступенева.

Таблиця 3 – Перевірка найкращої залежності за другим методом у натуральному масштабі

Обрані залежності		Розраховані значення		Розраховані значення	Отримана різниця
$y = mx$	$y\ (x_{сер.арифм.}) = 1/3(b_1x_1 + b_1x_2 + b_1x_3)$	-3	$y_{\ сер.арифм.} = 1/3(y_1+y_2+y_3)$	19	22
$y = x^m$	$y\ (x_{сер.геом.}) = \left(\sqrt[3]{x_1x_2x_3}\right)^{b_1}$	1,25	$y_{\ сер.геом.} = \sqrt[3]{y_1y_2y_3}$	18,72	17,47
$y = m^x$	$y\ (x_{сер.арифм.}) = 1/3(b_1x_1 + b_1x_2 + b_1x_3)$	0,19	$y_{\ сер.геом.} = \sqrt[3]{y_1y_2y_3}$	18,72	18,53

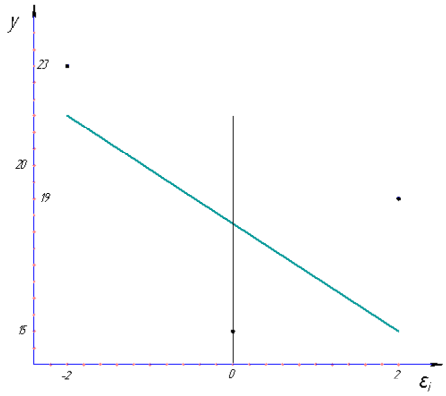
Перевірка похибок здійснювалася за формулами 3–4 і результати цього зазначено у табл. 4.

Таблиця 4 – Результати перевірки похибки розрахунків коефіцієнтів лінійних рівнянь

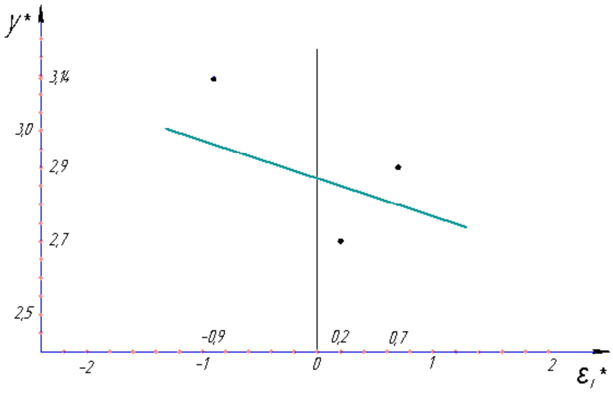
Обрані залежності	$y = b_0+b_1\varepsilon_i$	$y = b_0\varepsilon_i^{b_1}$	$y = b_0 b_i^{\varepsilon_i}$
(Δb_0)	17,33	1,02	1,57
(Δb_1)	17,32	0,84	1,45

Найменша похибка розрахунків належить обраній другій залежності, що лише підтверджує точність проведення прямої.

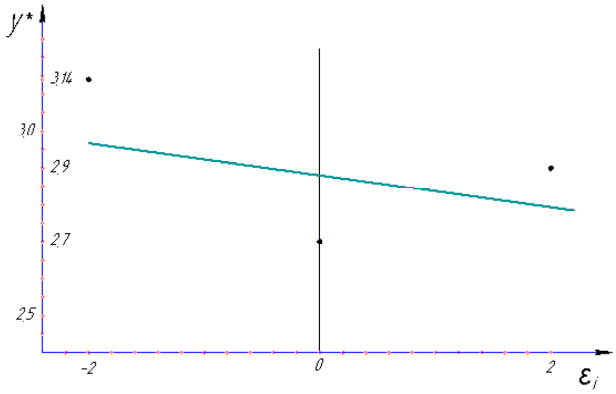
Характер впливу фактора ε_i на кут нахилу прямих зображено на рис. 1.



а



б



в

Рис. 1. Залежності, які описують вплив фактору ε_i на параметр оптимізації *y*: *а* – $y = b_0 + b_1 \varepsilon_i$; *б* – $y = b_0 \varepsilon_i^{b_1}$; *в* – $y = b_0 b_i^{\varepsilon_i}$

Отже, найбільш надійною залежністю слугує другий варіант, а саме

$$y_i = b_0 \varepsilon_i^{b_1} = b_0 (x_i - \bar{x})^{b_1} = 18{,}7(x_i - 0{,}3)^{-0{,}16}. \qquad (5)$$

Наведений приклад показує можливість математичної оцінки результатів експериментів у складних випадках розташування функціональних точок тільки за умови, що коефіцієнт лінійної кореляції буде більше 0,5.

Список літератури

1. Ольшанецкий В. Е. О физических подходах к математическому моделированию функциональных связей / Ольшанецкий В. Е. // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2003. – № 1. – С. 80–86.
2. Сквайрс Дж. Практическая физика / Сквайрс Дж. – М. : Мир, 1971. – 246 с.

Одержано 02.07.2019

© Д-р техн. наук Ольшанецький В. Ю., канд. техн. наук Грешта В. Л., асп. Джус А. В., асп. Фасоль Є. В.

Національний університет «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя

Ol‘shanetskii V., Greshta V., Dzhus A., Fasol Ye. About the mathematical evaluation possibility of experimental results using the minimum measurements