УДК 624.04:617-7

Канд. техн. наук Штанько П. К., канд. техн. наук Рягин С. Л.

Национальный университет «Запорізька політехніка», г. Запорожье

РАСЧЕТ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Цель работы. *Разработка квазианалитического метода решения нелинейных дифференциальных уравнений и его апробация применительно к балкам переменного сечения на упругом основании с двумя коэффициентами постели.*

Методы исследования. *Искомую функцию, с учетом ее предполагаемой формы, аппроксимируем некоторой известной функцией. После ее подстановки в нелинейное дифференциальное уравнение задача сводится к аналитическому или численному нахождению таких коэффициентов функции, при которых оценка разницы между правой и левой частями дифференциального уравнения будет минимальной при всех возможных значениях переменной. В соответствии с теорией качеств, величина оценки разности позволяет судить, насколько удачно была подобрана аппроксимирующая функция. Если для аппроксимации используется степенная функция, задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Решение может быть уточнено с помощью численной оптимизации, при которой искомые коэффициенты являются варьируемыми параметрами.*

Полученные результаты. *В ходе апробации были получены конкретные решения в области строительства. Была исследована клиновидная бетонная балка на упругом основании (грунте) с прямоугольным сечением переменной высоты. Были получены решения для семи различных форм распределенной нагрузки. Во всех случаях усредненная погрешность решения не превышала 0,1%, что подтверждает качество предложенного метода расчета и адекватность выбранной аппроксимирующей степенной функции.*

Научная новизна. *Авторам не встречался в литературных источниках такой метод решения нелинейных дифференциальных уравнений.*

Практическая ценность. *Предложенный квазианалитический метод может быть использован для решения дифференциальных уравнений любого порядка с нелинейностями различного типа, в том числе – при расчетах балок переменного сечения на упругом основании. При этом учет граничных условий легко реализуем.*

Ключевые слова: *балка переменного сечения, упругое основание, нелинейное дифференциальное уравнение, квазианалитический метод, аппроксимация, система линейных алгебраических уравнений, приближенное решение, погрешность.*

Введение

Качество математического моделирования предопределяет надежность и конкурентоспособность технических объектов. Это обуславливает актуальность и практическую ценность совершенствования методов расчета балок на упругом основании, встречающихся как в технике (в частности – в строительной механике), так и в других областях.

Анализ публикаций

Расчет частного случая балки переменного сечения, расположенной на упругом основании с одним коэффициентом постели, рассмотрен в работе [1]. В ней коэффициент постели определяет работу упругого основания только на сжатие. А также отсутствует метод расчета балок произвольного переменного сечения.

В книге [2] исследуется деформация балки постоянного сечения, покоящейся на упругом основании с двумя коэффициентами постели, второй их которых учитывает работу упругого основания на сдвиг. Однако не рассмотрен расчет балок переменного сечения.

Встречаются работы, в которых базовое уравнение [2] записано в форме, подразумевающей рассмотрение балки переменного сечения. Однако, в связи со сложностью решения такого нелинейного дифференциального уравнения, в дальнейшем расчете балка аппроксимируется аналогичной постоянного сечения.

DOI 10.15588/1607-6885-2019-1-9

Цель работы

Таким образом, в известных авторам литературных источниках нет универсального метода расчета балки переменного сечения на упругом основании с двумя коэффициентами постели. Целью данной статьи является разработка и апробация такого метода расчета.

Метод исследования

Расчетная схема балки переменного сечения на упругом основании с двумя коэффициентами постели показана на рис. 1. Как для технических, так и для других приложений задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения [2]:

$$E \cdot I(x) \cdot \frac{d^4 v}{dx^4} - 2 \cdot t \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + k \cdot v = q(x), \quad (1)$$

где v – прогиб балки;

$E \cdot I(x)$ – переменная жесткость поперечного сечения балки;

k, t – соответственно первый и второй коэффициенты постели;

$q(x)$ – распределенная нагрузка.

Поскольку аналитическое решение уравнения (1) затруднительно, можно найти его приближенное решение предлагаемым авторами квазианалитическим методом, пригодным для дифференциальных уравнений любого порядка и любой нелинейности.

Искомую функцию, с учетом ее предполагаемой формы, аппроксимируем некоторой известной функцией:

$$v(x) \approx u(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (2)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – коэффициенты функции u.

После подстановки функции (2) в нелинейное дифференциальное уравнение задача сводится к аналитическому или численному нахождению таких коэффициентов функции u, при которых оценка разницы между правой и левой частями дифференциального уравнения будет минимальной при всех возможных значениях x. В соответствии с теорией качеств [3], величина оценки разности позволяет судить, насколько удачно была подобрана функция u.

В данном случае, такая оценка разницы может быть реализована, например, как интеграл по длине балки l квадрата разности между правой и левой частями уравнения (1), хотя возможны и любые другие варианты.

Поскольку рассматриваемая функция $v(x)$ является упругой линией балки, ее уместно аппроксимировать степенной функцией с не менее чем пятью неизвестными коэффициентами:

$$u(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4, \quad (3)$$

Эти неизвестные коэффициенты могут быть найдены:

- численной оптимизацией, при которой неизвестные коэффициенты становятся варьируемыми параметрами, а оценка разницы – целевой функцией;
- приближенным аналитическим способом, при котором, после подстановки уравнения (3) в уравнения (2) и (1), путем приравнивания x конкретным значениям (по количеству неизвестных коэффициентов) составляется система линейных алгебраических уравнений;
- комбинированным способом, при котором значения неизвестных коэффициентов, полученные аналитически по второму способу, служат начальной точкой для численной оптимизации по первому способу.

Численная оптимизация, в зависимости от количества неизвестных коэффициентов, может требовать заметных вычислительных ресурсов, а также предопределяет высокий риск попадания в локальный экстремум, что может полностью исказить ход решения. Приближенный аналитический способ может увеличить погрешность решения, поскольку основывается на обеспечении равенства правой и левой частей дифференциального уравнения лишь в некоторых точках

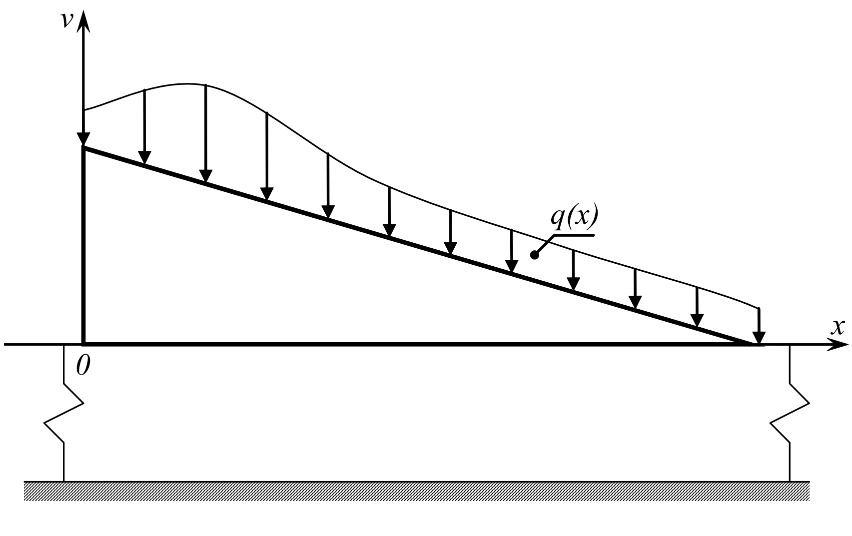

Рис. 1. Расчетная схема

по длине стержня. Поэтому наиболее рациональным представляется комбинированный способ, со сравнительным анализом погрешностей приближенного аналитического решения и его последующего численного уточнения.

Для реализации приближенного аналитического способа определим необходимое количество производных уравнения (3):

$$\frac{du}{dx} = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 4 \cdot a_4 \cdot x^3, \qquad (4)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x + 12 \cdot a_4 \cdot x^2, \qquad (5)$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 6 \cdot a_3 + 24 \cdot a_4 \cdot x, \qquad (6)$$

$$\frac{d^4u}{dx^4} = 24 \cdot a_4. \qquad (7)$$

Подстановка уравнений (3), (4), (5), (6), (7) в уравнения (2) и (1) после простых преобразований дает уравнение:

$$c_4 \cdot a_4 + c_3 \cdot a_3 + c_2 \cdot a_2 + c_1 \cdot a_1 + k \cdot a_0 = q(x), \qquad (8)$$

где

$$c_4 = 24 \cdot E \cdot I(x) - 24 \cdot t \cdot x^2 + k \cdot x^4, \qquad (9)$$

$$c_3 = -12 \cdot t \cdot x + k \cdot x^3, \qquad (10)$$

$$c_2 = -4 \cdot t + k \cdot x^2, \qquad (11)$$

$$c_1 = k \cdot x. \qquad (12)$$

Приравнивание x пяти конкретным значениям из интервала $x \in [0; l]$ (по количеству неизвестных коэффициентов), в частности (с равным шагом) $x = \{0; l/4; l/2; 3l/4; l\}$, превращает уравнение (8), включая (9), (10), (11), (12), в систему пяти линейных алгебраических уравнений, неизвестными в которой выступают коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3, a_4. Эта система линейных алгебраических уравнений может быть легко решена любым известным способом.

Результаты исследований и их обсуждение

В качестве примера были получены конкретные решения в области техники (строительство).

Была исследована клиновидная бетонная балка на упругом основании (грунте) длиной 6 м, с шириной $b = 0{,}6$ м и высотой $h_0 = 0{,}6$ м прямоугольного сечения в начале координат. В расчете использовались характерные значения: $E = 2 \cdot 10^{10}$ Па, $k = 145{,}8 \cdot 10^5$ Па, $t = 189{,}6 \cdot 10^5$ Н.

Для клиновидной формы балки жесткость поперечного сечения учитывалась как $E \cdot b \cdot h_0^3/12 \cdot (1 - x/l)^3$.

Использовался комбинированный способ нахождения неизвестных коэффициентов. Решение системы пяти линейных алгебраических уравнений осуществлялось методом Гаусса. Дальнейшая оптимизация выполнялась методом последовательных приближений. В качестве целевой функции использовалась сумма квадратов разности между правой и левой частями уравнения (8) в точках балки, взятых с шагом 0,1 м по длине (всего 61 точка).

В качестве окончательной оценки разницы использовалась сумма модулей разности между правой и левой частями уравнения (8), отнесенная к модулю суммы правой части того же уравнения, в тех же точках балки, умноженная на 100 %. Такую величину можно считать усредненной погрешностью решения.

Были получены решения для семи различных форм распределенной нагрузки. В качестве примера на рис. 2 показан результат решения для случая $q = q_0 \cdot \sin(\pi \cdot x/l)$ (нагрузка действует преимущественно посередине), на рис. 3 – $q = q_0 \cdot e^{-\sin(p \cdot x/l)}$ (нагрузка действует преимуще-

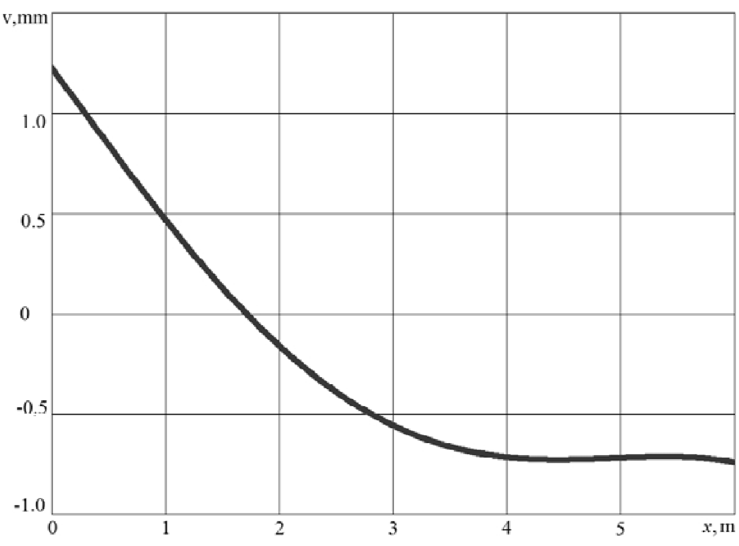

Рис. 2. Пример результата решения для случая $q = q_0 \cdot \sin(\pi \cdot x/l)$

ственно по краям), на рис. 4 – $q = q_0 \cdot e^{(x/l-1)}$ (нагрузка действует преимущественно справа), где $q_0 = 20$ кН/м.

Из анализа полученных результатов видно, что форма линии прогиба балки, с учетом ее клиновидной формы, в общем соответствует заданным нагрузкам.

Для случая $q = q_0 \cdot \sin(\pi \cdot x/l)$ усредненная погрешность решения составила 0,054 %, для случая $q = q_0 \cdot e^{-\sin(\pi \cdot x/l)}$ – 0,07 %, для случая $q = q_0 \cdot e^{(x/l-1)}$ – 0,001 %.

Для других форм распределенной нагрузки усредненная погрешность решения также не превышала 0,1 %, что вполне приемлемо для практических целей и подтверждает адекватность выбранной аппроксимирующей степенной функции (3).

Достаточно точное определение деформаций балки дает возможность перейти к анализу ее напряженного состояния.

Выводы

Таким образом, предложенный авторами квазианалитический метод расчета является универсальным, поскольку он приемлем как для расчета балки переменного сечения на упругом основании с двумя коэф-

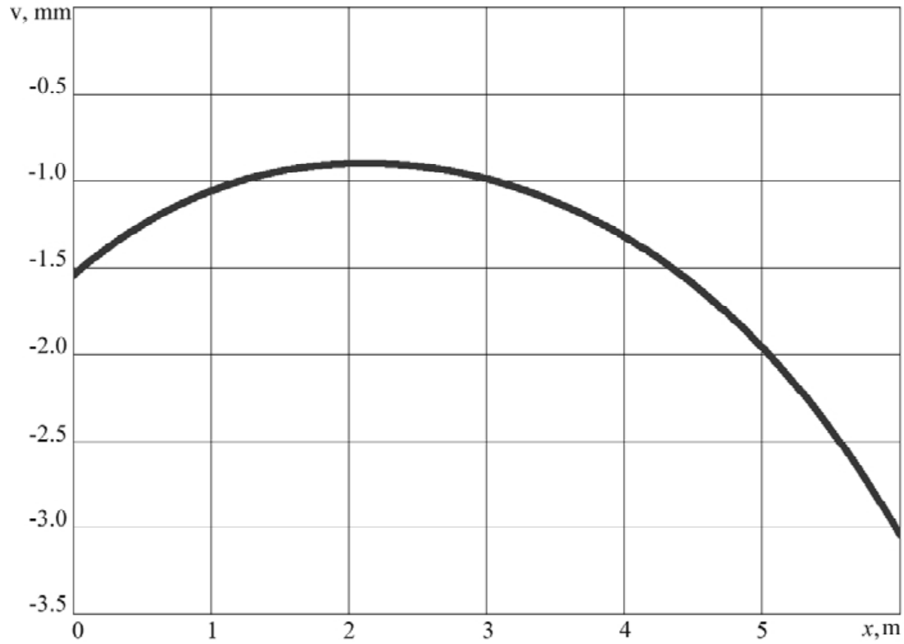

Рис. 3. Пример результата решения для случая $q = q_0 \cdot e^{-\sin(\pi \cdot x/l)}$

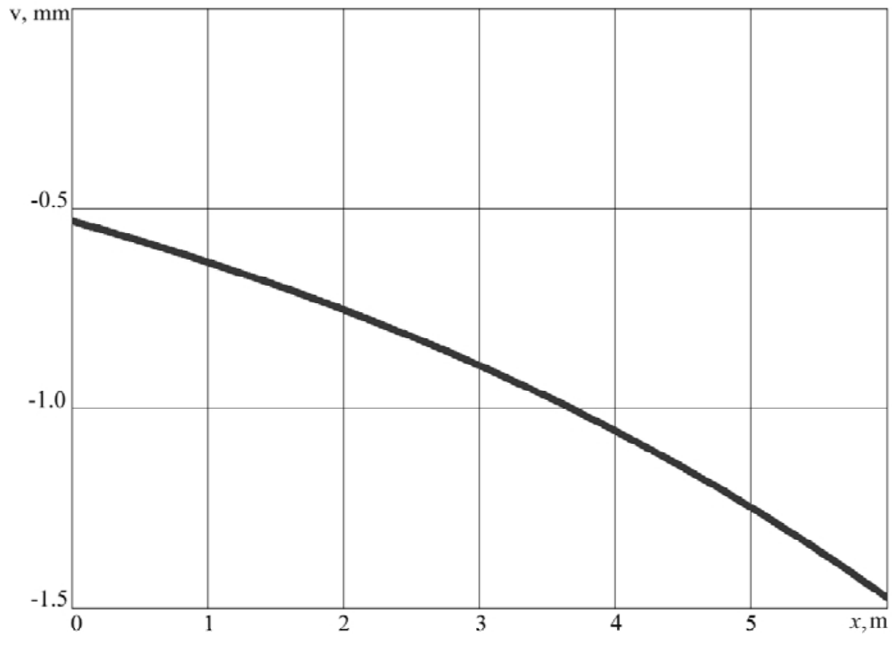

Рис. 4. Пример результата решения для случая $q = q_0 \cdot e^{(x/l-1)}$

фициентами постели, так и для решения других нелинейных дифференциальных уравнений. Деформация балки на упругом основании зависит как от формы распределенной нагрузки, так и от изменения параметров упругого основания и размеров поперечного сечения по длине. В перспективе авторы планируют рассмотреть учет граничных условий путем добавления к системе соответствующих линейных алгебраических уравнений при определении коэффициентов аппроксимирующей функции.

Список литературы

1. Микеладзе Ш. Е. Некоторые задачи строительной механики / Микеладзе Ш. Е. – М., Л. : Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1948. – 267 с.
2. Власов В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 491 с.
3. Брызгалин Г. И. Введение в теорию качеств : учебное пособие / Брызгалин Г. И. – Волгоград, 1988. – 91 с.

Одержано 25.10.2018

Штанько П.К., Рягін С.Л. Розрахунок балки змінного перерізу на пружній основі квазіаналітичним методом

Мета роботи. *Розробка квазіаналітичного методу рішення нелінійних диференційних рівнянь та його апробація стосовно балок змінного перерізу на пружній основі з двома коефіцієнтами постелі.*

Методи досліджень. *Шукану функцію, з урахуванням її передбачуваної форми, апроксимуємо певною відомою функцією. Після її підстановки у нелінійне диференційне рівняння задача зводиться до аналітичного або чисельного знаходження таких коефіцієнтів функції, при яких оцінка різниці між правою та лівою частинами диференційного рівняння буде мінімальною при всіх можливих значеннях змінної. У відповідності до теорії якостей, величина оцінки різниці дає можливість судити, наскільки вдало було підібрано апроксимуючу функцію. Якщо для апроксимації використовується степенева функція, задача зводиться до рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Рішення може бути уточнено за допомогою чисельної оптимізації, при якій шукані коефіцієнти є варійованими параметрами.*

Отримані результати. *У ході апробації було отримано конкретні рішення в області будівництва. Було досліджено клиновидну бетонну балку на пружній основі (грунті) з прямокутним перерізом змінної висоти. Було отримано рішення для сьоми різних форм розподіленого навантаження. У всіх випадках усереднена похибка рішення не перевищувала 0,1%, що підтверджує якість запропонованого методу розрахунку та адекватність обраної апроксимуючої степеневої функції.*

Наукова новизна. *Автори не зустрічали у літературних джерелах такий метод рішення нелінійних диференційних рівнянь.*

Практична цінність. *Запропонований квазіаналітичний метод може бути використано для рішення диференційних рівнянь будь-якого порядку з нелінійностями різного типу, у тому числі – при розрахунках балок змінного перерізу на пружній основі. При цьому врахування граничних умов легко реалізовуване.*

Ключові слова: *балка змінного перерізу, пружна основа, нелінійне диференційне рівняння, квазіаналітичний метод, апроксимація, система лінійних алгебраїчних рівнянь, наближене рішення, похибка.*

Shtanko P., Ryagin S. Design of a beam of variable cross-section on the elastic base by the quasi-analytical method

Purpose. *Development of the quasi-analytical method of nonlinear differential equation solution and its approbation with reference to beams of variable cross-section on the elastic base with two base factors.*

Methods of researches. *Required function, taking into account its assumpted form, can be approximated by some known function. After its substitution in the nonlinear differential equation, the problem is reduced to an analytical or numerical finding of such function factors at which the estimation of difference between the right and left parts of the differential equation will be minimal at all possible variable values. According to the theory of qualities, the value of a difference estimation allows to conclude, how much successfully the approximating function has been chosen. If power function is used for approximation, the problem is reduced to solution of system of the linear algebraic equations. Solution result accuracy can be improved by means of numerical optimisation at which required factors are varied parameters.*

Results. *Specific solutions in the field of building have been obtained during approbation. The wedge-shaped concrete beam on the elastic base (ground) with rectangular cross-section of variable height has been researched. Solutions for seven various forms of the distributed load have been obtained. In all cases the average solution error had not exceed 0.1%. That confirms quality of the offered solution method and adequacy of the chosen approximating power function.*

Scientific novelty. *The authors had not meet in literature such method of nonlinear differential equation solution.*

Practical value. *The quasi-analytical method that has been offered can be used for solution of differential equations of any order with various types of nonlinearity, including calculations of beams of variable cross-section on the elastic base. Besides, consideration of boundary conditions can be easily realised.*

Keywords: *a beam of variable cross-section, the elastic base, a nonlinear differential equation, the quasi-analytical method, approximation, system of the linear algebraic equations, approximate solution, an error.*